

熊本大学工学部 正員 秋吉 卓
 熊本大学工学部 学生員 有田 茂
 熊本大学工学部 学生員 ○吉本俊裕

1. まえがき 輸送のための土木構造物が地中のみならず水中にも打設される傾向にあるが、これの耐震性についても急速に関心が高まっている。ここでは死埋トンネルないしは浮力を利用した浮トンネル構造物を解析の対象にするが、これの一般断面についての理論解の導出は境界条件の点から容易ではなく、流体に有限要素法を適用して行列表示による数値解析を行なった。水の圧縮性を無視した場合についてその一部をすでに発表した^{1,2}が、本研究では水の圧縮性を考慮した場合をも含めた解析を行なったので、ここに報告する。

2. 解析手法 図-1のような流体と構造物よりなる2次元平面

の系を考える。構造物が水平運動($\ddot{x}$)を行なうときに、流体中に発生する動水圧を $P(x, z; t)$ とすると、圧縮性流体については

$$\partial^2 P / \partial x^2 + \partial^2 P / \partial z^2 = 1/c \cdot \partial^2 P / \partial t^2 \quad \text{----- (1)}$$

という波動方程式が成り立つ。

そこで流体を図-1のように無数の三角形要素に分割して、その要素内の動水圧 P を節点(動水圧)値 $\{P\}^e = \{P_i, P_j, P_m\}$ で

$$P(x, z) = [N_i \ N_j \ N_m] \{P\}^e \quad \text{----- (2)}$$

と表わすと、有限要素法により要素内部において、式(1)と等価な関係として次式を導くことができる。

$$[R]^e \{P\}^e + [G] \frac{\partial^2 \{P\}^e}{\partial t^2} + \{f\} = 0 \quad \text{----- (3)}$$

ただし、 $N_i = 1/2\Delta (a_i + b_i x + c_i z)$

$$a_i = x_j z_m - x_m z_j, \quad b_i = z_j - z_m, \quad c_i = x_m - x_j, \quad \text{-----,}$$

これを全体系に拡大すると、式(3)は次式のようになる。

$$[H] \{P\} + [G] \frac{\partial^2 \{P\}}{\partial t^2} + \{F\} + \{F\}_B = 0 \quad \text{----- (4)}$$

ここに、 $H_{ij} = \sum R_{ij}$, $F_i = \sum f_i$ (外力項), $\{F\}_B$ は境界 B_L, B_R において波動伝播性を考慮する修正ベクトル。

式(4)を節点動水圧について解くためには、式(2)が境界において次の境界条件を満たさねばならない。

$$z=0 \text{ (水底)}: \partial P / \partial z = 0, \quad z=H \text{ (水面)}: P=0, \quad \text{左右の境界 } B_L, B_R \text{ において: } \partial P / \partial x = 0 \quad \text{----- (5)}$$

$$\text{一方水中構造物表面においては, } \partial P / \partial n + q = 0, \quad (q = -P\ddot{x}, \quad n: \text{法線方向}) \quad \text{----- (6)}$$

式(5)の境界条件は計算過程で自動的に考慮しうが、式(6)の場合は

構造物表面の節点水平加速度 $\{a_i, a_2, \dots, a_r\}$ と $\{q_i\}$ は次式で結ばれる。

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \end{Bmatrix} = -P \begin{bmatrix} n'_1 \\ \vdots \\ n'_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{Bmatrix}, \quad (n': \text{水中方向への法線}) \quad \text{--- (7)}$$

したがって、構造物表面の節点動水圧 $\{P\}_s^T = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ は、定常調和振

動を考えるときは $\{P\}_s = \{P\}_s \exp(i\omega t)$ とおき、他の項も $\{F\} = \{F\}_0 \exp(i\omega t)$, $\{F\}_B = \{F\}_B \exp(i\omega t)$

とすると、式(4)より、修正ベクトル $\{F\}_B$ を考慮しないときは

$$\{P\}_s = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{Bmatrix} = -[E] \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \end{Bmatrix} = \frac{P}{\rho} [E][L][N'] \{a\}_s = -[M_0] \{\delta\}_s \quad \text{----- (8)}$$

ここに、 $[M_0] = \frac{P}{\rho} [E][L][N]$, $[N'] = \begin{bmatrix} n'_1 & \dots & n'_r \end{bmatrix}$, $\{a\}_s = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_r \end{Bmatrix}$, $([H] - \omega^2 [G])^{-1} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ E & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, $\{\delta\}$: 節点水平加速度

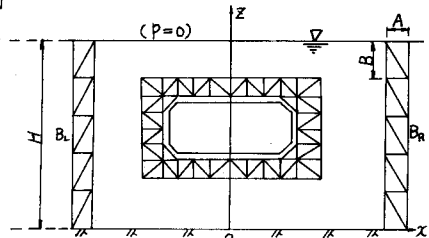


図-1 水中構造物と流体のモデル

$$[G]^e = \frac{W}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad W = \rho t \Delta, \quad \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \end{vmatrix}$$

$$[R]^e = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} + \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix}$$

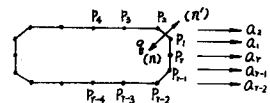


図-2 節点動水圧と加速度

一方, $\{F\}_B$ を考慮する場合は後述のように, $\{F\}_B = [R]\{P\}$ という形に表わしうるので, $[E]$ は次式となる。

$$([H] - \omega^2 [G] + [R])^{-1} = \begin{bmatrix} E_{11} & \dots & E_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1} & \dots & E_{nn} \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & 2(L_{12} + L_{21}) & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \dots & \dots & 2(L_{n-1,n} + L_{n,n-1}) \end{bmatrix}, \quad L_{ij}: \text{節点 } i \text{ 間の長さ}$$

したがって, 式(8)の圧力 $\{P\}_s$ を節点抵抗力 $\{R\}_s$ に換算すると

$$\{R\}_s = -[A]\{P\}_s = -[A][M_0]\{Q\}_s = [M_0]\{\delta\} \quad \text{------(9)}$$

ただし, $[M_0] = [A][M_0]$, $[A]$: 圧力を節点に割り付けるマトリックス。

3.境界修正ベクトル $\{F\}_B$ $\{F\}_B$ は境界条件(5)の最後の式が無限の広がりを持つ状態を表わさないで, これを修正するためのベクトルである。ここでは水の圧縮性を考慮するので, 縦波が伝播するようにしたときの節点動水圧ベクトルを求めればよいことになる。

そこで図-3のような矩形要素内の動水圧 $P(x, z)$ を, 式(2)と同様にして

$$P(x, z) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \{P\}^e \quad \text{------(10)}$$

と表わす。ここに, $N_1 = (1-\xi)(1-\eta)$, $N_2 = \xi(1-\eta)$, $N_3 = \xi\eta$, $N_4 = (1-\xi)\eta$, $\xi = x/A$, $\eta = z/B$ である。

このとき, 式(4)の $[H]$ に相当する, 境界 B_R をはさむ柱状体(図-3, (b))の $[H']$ は次式で与えられる。

$$[H'] = [A] + (R\lambda)^2 [C] \quad \text{------(11)}$$

ここに, $[A] = \frac{A}{6B} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $[C] = \frac{B}{6A} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, ただし R は波数で, $A \ll H$ とする。

同様に, 式(4)の $[G]$ に相当する, 図-3の $[G']$ は $[G'] = \frac{tAB}{C^2} \begin{bmatrix} 2\lambda & 1/\lambda & 1/\lambda & 1/\lambda \\ 1/\lambda & 4\lambda & 1/\lambda & 1/\lambda \\ 1/\lambda & 1/\lambda & 4\lambda & 1/\lambda \\ 1/\lambda & 1/\lambda & 1/\lambda & 2\lambda \end{bmatrix} \quad \text{------(12)}$

これら $[H']$, $[G']$ による次の, 波数 R に関する振動数方程式を導入する。

$$[H']\{\delta\} - \omega^2 [G']\{\delta\} = 0$$

すなわち $((R\lambda)^2 [C] - [D])\{\delta\} = 0$, $[D] = \omega^2 [G] - [A] \quad \text{------(13)}$

このとき, 固有値・固有ベクトルを $R_1, \dots, R_m$; $\{\delta\}_1, \dots, \{\delta\}_m$ とし, モーダルマトリックス $[Q] = [\{\delta\}_1, \dots, \{\delta\}_m]$ を用いると, 境界 B_R において加えるべき修正ベクトル $\{F\}_R$ は, 結果のみ記すと次のようになる。

$$\{F\}_R = \frac{B}{6} [B][Q][R]\{\delta\} = \frac{B}{6} [B][Q][R][Q]^T [C]\{P\}_R = [R]_R \{P\}_R \quad \text{------(14)}$$

ここに, $[Q]^T [C][Q] = [I]$ と正規化されており, $[B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $[R] = \begin{bmatrix} iR_1 & & & \\ & iR_2 & & \\ & & iR_3 & \\ & & & iR_m \end{bmatrix}$

同様に, 境界 B_L についても $\{F\}_L$ が求められるが, 明らかに $\{F\}_L = \{F\}_R$ であるから, これら2つの境界修正マトリックスを系全体の大きさに拡大して合成したものを, 改めて $\{F\}_B$ とおくと

$$\{F\}_B = \begin{Bmatrix} [R]_R \{P\}_R \\ [R]_L \{P\}_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & [R]_R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & [R]_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_R \\ \vdots \\ \{P\}_L \end{Bmatrix} = [R]\{P\} \quad \text{------(15)}$$

のように書き表わすことができるが, $[R]$ は一般に複素数であるから波動伝播による減衰効果が生ずることが分かる。また固有値(波数) $R_1, \dots, R_m$ は振動数 ω に依存するので, $\omega < CR$ では波は全く伝播せず一様な運動になり, 固有値 $\{R\}$ の値は全て負の純虚数となる。一方 $\omega > CR$ では正の実数をとる波数が1個以上存在するので, 分散性の波動が伝播することを意味する。

以上は, 水の圧縮性を考慮する場合の解析手法であるが, 非圧縮性流体の場合は波数 iR の替りに振動減衰率 α (正の実数)を導入し, 上記の解析中の ω または $[G]$ の項を無視すれば, 全く同様な取扱いを行ないうる。

計算結果等については講演時に述べる。

参考文献 1) 秋吉・他: 昭和47年度西部支部研究発表会, 昭和48年2月, 2) 秋吉: 土木学会第28回年次学術講演会, 昭和48年10月, 3) Zienkiewicz: Finite Element Method in Engineering Mechanics, McGraw-Hill.