

熊本大学工学部 正員 秋吉 卓
 熊本大学工学部 学生員 ○岡田 敦文
 熊本大学工学部 学生員 村岡和彦

1 まえがき 軟弱な地盤の多い我が国において、主として経済性の面から鋼管を用いた群杭形式の基礎が多
 用されつつある。しかるに群杭の支持力が単杭の支持力の杭本数倍以下である、いわゆる群杭効果が現象的には
 以前より認められていたにもかかわらず、その理論的解析ないしは系統的な解析が明確になされるには至って
 ない。とくに、鉛直支持力より水平支持力について理論解析が困難であり、これの解明のための有限要素法等の
 数値解法が導入されている。本研究では、群杭の動的水平支持力特性を調べるために、平面応力状態の地盤中に
 剛な群杭が水平運動する系を対象にして、その結果を群杭効果として整理せんとするものである。なお地盤は
 有限要素法を適用するので、ごく限られた範囲しかとり扱えないが、これを無限の広さの地盤に修正するために
 外側の境界に特殊な操作を行なっている。

2 解析手法 図-1のような三角形要素(厚さ t の弾性体) i, j, m の各頂点
 に仮想変位 $d\{f\}$ を与えるとき、内部にこれに応ずる変位 $d\{f\}$ が生ずるとす
 ると、仮想仕事の原理より(内部仕事) - (外部仕事) = 0、

すなわち

$$\int_V d\{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - [d\{\delta\} \{R\} + \int_V d\{f\}^T \{p\} dV] = 0 \quad \text{---(1)}$$

ここに $\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$ ひずみベクトル, $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$ 応力ベクトル

$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_m \end{Bmatrix}$, $\{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$, $\{R\}$: 節点外力ベクトル, $\{p\}$: 分布外力ベクトル, $\{f\}$: 要素内変位

そこで、節点変位と要素内変位との間に線形近似を行なうと、

$$\{f\} = [N] \{\delta\} \quad \text{---(2)}$$

と表わせる。ここに、 $[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}$: 形状関数, $N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$, $a_i = x_j y_m - x_m y_j$,

$b_i = y_j - y_m$, $c_i = x_m - x_j$, Δ : 三角形 i, j, m の面積。

ところで、要素内のひずみと応力は

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}, \quad \{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D][B] \{\delta\} \quad \text{---(3)}$$

と表わされる。

$$\text{ただし, } [B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}, \quad [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix}$$

したがって、分布力が慣性力 $\{-p\}$ のみのとき、式(2)より $d\{f\} = [N] d\{\delta\}$ と表わることから、式(3)は

$$d\{\delta\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{\delta\} - d\{\delta\}^T \{R\} + d\{\delta\}^T \int_V [N]^T p [N] \{\delta\} dV = 0$$

$$\text{すなわち } [M] \ddot{\{\delta\}} + [K] \{\delta\} = \{R\} \quad \text{---(4)}$$

$$\text{ここに, } [K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = 4t [B]^T [D] [B], \quad [M] = \int_V [N]^T \rho [N] dV = \frac{\rho t \Delta}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

図-2のような系全体の運動方程式は次式のように書ける。

$$[M] \ddot{\{\delta\}} + [K] \{\delta\} = \{R\} + \{F\}_B \quad \text{---(5)}$$

ここに、 $\{F\}_B$ は、基礎表面より放射される波動が境界 B で

反射されずに無限遠方へ伝播するように修正する、境界修正ベクトルである。

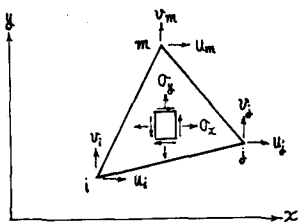


図-1 有限要素

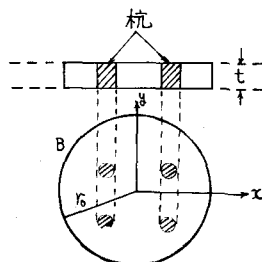


図-2 平面ひずみ地盤

3 境界処理 境界Bに接する要素を図-3のように扇形 $ijkm$ で代表させる。このとき要素内変位 $\{f\}_B = \{u\}_B$, (u, v : 動径・接線方向変位) は先述の式(2)と同様にして、次式のように書き表わされる。

$$\{f\}_B = \{u\}_B = [N]_B \{\delta\}_B \quad \text{-----(6)}$$

$$\text{ただし } [N]_B = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_k \end{bmatrix}, \quad \{\delta\}_B = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_k \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$N_i = \frac{1}{a\theta} (r_0 + a - r)(\theta_i - \theta), \quad N_j = \frac{1}{a\theta} (r_0 + a - r)(\theta - \theta_i), \quad N_m = \frac{1}{a\theta} (r - r_0)(\theta_j - \theta), \quad N_k = \frac{1}{a\theta} (r - r_0)(\theta - \theta_j)$$

さらに、要素内のひすみ・応力を極座標表示すれば、次のようになる。

$$\{\epsilon\}_B = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} = [B]_B \{\delta\}_B, \quad \{\sigma\}_B = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\}_B, \quad [D] = E \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \beta = \frac{1-\nu}{2} \quad \text{-----(7)}$$

$$\text{ここに } [B]_B = \frac{1}{a\theta} \begin{bmatrix} -(\theta_j - \theta) & 0 & -(\theta - \theta_i) & 0 & \theta_j - \theta & 0 & \theta - \theta_i & 0 \\ \frac{(r_0 - r)}{r}(\theta_j - \theta) & -\frac{(r_0 - r)}{r} & \frac{(r - r_0)}{r}(\theta - \theta_i) & \frac{(r - r_0)}{r} & \frac{(r - r_0)}{r}(\theta_j - \theta) & -\frac{(r - r_0)}{r} & \frac{(r - r_0)}{r}(\theta - \theta_i) & \frac{(r - r_0)}{r} \\ -\frac{(r_0 - r)}{r} & -\frac{r}{r}(\theta_j - \theta) & \frac{(r_0 - r)}{r} & -\frac{r}{r}(\theta - \theta_i) & -\frac{(r - r_0)}{r} & -\frac{r}{r}(\theta_j - \theta) & \frac{(r - r_0)}{r} & -\frac{r}{r}(\theta - \theta_i) \end{bmatrix}, \quad r'_0 = r_0 + a$$

ここで杭が円振動数 ω で振動しているとする、波数 $k = \omega/V$ (V : 基準伝播速度、ここでは縦波・横波の区別を考へない) の波が無限遠方に伝わって行くので、図-3の i, j 点には m 点より位相が $k a$ だけ遅れていることになる。したがって、 $\{\delta\}_i = \{\delta\}_m \exp(ik a)$, $\{\delta\}_j = \{\delta\}_k \exp(ik a)$ と表わせる。

取扱う領域が十分大きい場合 ($r_0 \gg 1$ の場合), $\nu a/r'_0 \cong 0$, $r'_0 \cong r_0$, $1 - \exp(ik a) \cong -ik a$ としうるので、途中の計算課程を省略して結果のみを記すと、

$$\begin{aligned} Q_i &= -iE_0 k u_i, \quad T_i = -iE_0 \beta k v_i, \quad Q'_i = -iE_0 k u_j, \quad T'_i = -iE_0 \beta k v_j \\ Q'_j &= -iE_0 k u_j, \quad T'_j = -iE_0 \beta k v_j, \quad Q_k = -iE_0 k u_k, \quad T_k = -iE_0 \beta k v_k \end{aligned} \quad \text{-----(8)}$$

これより、動径・接線方向の節点力 N_i, T_i は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{L}{6} [Q_i + 2(Q'_i + Q'_j) + Q_k] = -\frac{i}{6} E_0 k L t (u_i + 4u_j + u_k) \\ T_i &= \frac{L}{6} [T_i + 2(T'_i + T'_j) + T_k] = -\frac{i}{6} E_0 \beta k L t (v_i + 4v_j + v_k) \end{aligned} \quad \text{-----(9)}$$

境界円周上に r 個の節点があるとする、式(9)の N_i, T_i を x, y 方向の力 F_x, F_y に変換したものの集合 $\{F\}_B$ は次式のようになる。

$$\{F\}_B = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \vdots \\ F_{xr} \\ F_{yr} \end{Bmatrix} = -\frac{i}{6} E_0 k L t [\Theta][A] \{\delta\}_B = [k]_B \{\delta\}_B \quad \text{-----(10)}$$

ただし、 $[k]_B = -\frac{i}{6} E_0 k L t [\Theta][A]$: 境界剛性マトリックス

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & & & \\ & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ & & & & \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4\theta & 0 & \beta & \cdots & 0 & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \beta & \cdots & 0 & \beta & 0 & 4\theta \end{bmatrix}, \quad \{\delta\}_B = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \vdots \\ \delta_r \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

式(10)の $\{F\}_B$ の内容は境界上の節点についてであるから、これを式(5)の右辺に用いる場合は全節点の大きさに拡大するため、 $[k]_B$ に適当に0要素を入れて大きさを合わせる必要がある。

そこで定常調和振動を考へて、杭表面の節点外力が $\{R\} = \{R_0 \exp(i\omega t)\}$ のとき、杭の応答変位を $\{\delta\} = \{\delta_0 \exp(i\omega t)\}$ とすれば、式(5)より応答変位は次式で求められる。

$$\{\delta\} = \{\delta_0 \exp(i\omega t)\} = ([K] - [k]_B - \omega^2 [M])^{-1} \{R\}_0 \exp(i\omega t) \quad \text{-----(11)}$$

$\{\delta\}$ は逸散波動のため複素数となり減衰性が付与されることを意味している。計算結果は講義時に譲る。

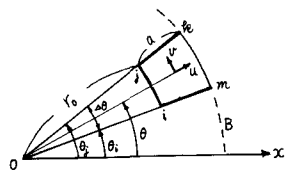


図-3 扇形要素

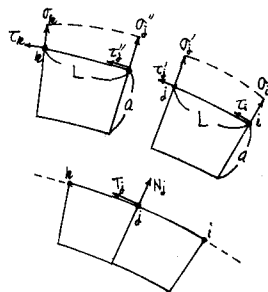


図-4 境界節点力の合成

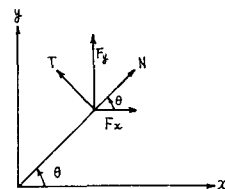


図-5 座標変換