I－1　　有限要素法による堤体の振動および浸透流解析について

熊本大学工学部　正　員　　三池亮次
熊本大学工学部　正　員　　秋吉　卓
熊本大学工学部　学生員　○滝川　清

1.まえがき　浸透流は、土木構造物の解析において、いろいろな形で問題となり、古くから解析の対象とされてきたが、一般的な理論解析は容易ではなく、近年の電子計算機の発展に伴い、この浸透流問題においても O.C.Zienkiewicz[1] らをはじめとして、有限要素法を用いた解析方法が開発された。しかしながら、動的問題、とくに、地震動を受ける堤体と流体の相互作用系の解析については、それほど著しい成果[2),3)]は得られていない。本研究では、水を非圧縮性流体として、その質量効果が堤体の振動性状に及ぼす影響を主として解析を行なったので、ここに報告する。

2.有限要素法による浸透流解析　二次元異方性媒体を考え、この内部での浸透流が Darcy の法則に従うものと仮定する。そこで、水頭；$\phi = P/\gamma_0 + y$ とするとき、非定常浸透流に対し、水頭 ϕ は次式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \mu \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \cdots\cdots(1)$$

このとき、初期条件および境界条件として

初期条件；$\phi_{t=0} = \phi_0(x, y; 0)$

境界条件；(A)水頭 ϕ が境界で与えられる場合

(B)境界上で浸透流の流出入量が与えられる場合　すなわち

$$k_x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot l_x + k_y \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot l_y + g = 0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

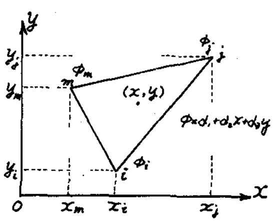
（l_x, l_y は境界外向法線方向余弦，g は単位表面からの流出入量）

しかるに、境界条件(2)のもとに、式(1)を解くことは、ϕ に関する次の汎関数 $\chi(\phi)$ を最小化することと等価である。

$$\chi(\phi) = \iint_S \left[\frac{1}{2}\left\{ k_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right\} + \left(\mu \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\phi \right] dx \cdot dy + \int_c g \phi \, dS \qquad \cdots\cdots(3)$$

　ただし、$\partial \phi / \partial t$ は不変量、すなわち、ある時刻に対しては、場所のみの関数として取り扱う。

有限要素法を適用すれば、解析領域を三角形要素群に分割するとき、図－1のような要素内の水頭 $\phi(x, y)$ は、その節点値 $\{\phi_i, \phi_j, \phi_m\}$ により、次式で与えられる。



図－1. 三角形要素

$$\phi(x, y) = [N_i, N_j, N_m]\{\phi\}^e \qquad \cdots\cdots(4)$$

ただし、$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta$，$\{\phi\}^e = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{Bmatrix}$，$\Delta$；三角形 i, j, m の面積

$a_i = x_j y_m - x_m y_j$，$b_i = y_j - y_m$，$c_i = x_m - x_j$，$\cdots\cdots$

この要素の汎関数を $\chi^e(\phi)$ とすると，$\{\phi\}^{eT} = \{\phi_i, \phi_j, \phi_m\}$ の最小化によって、

$$\partial \chi^e(\phi)/\partial\{\phi\}^e = \iint_{S^e} \left[\left\{ k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \{\phi\}^e}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \{\phi\}^e}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \right\} + \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \frac{\partial \phi}{\partial \{\phi\}^e} \right] dx \cdot dy + \int_{C^e} g \frac{\partial \phi}{\partial \{\phi\}^e} dS$$
$$= [h]^e \{\phi\}^e + [C]^e \frac{\partial}{\partial t}\{\phi\}^e + [f]^e = 0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここに，$h_{ij}^e = \iint_{S^e} \left\{ k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} dx \cdot dy = (k_x \cdot b_i b_j + k_y \cdot c_i c_j)/4\Delta$

$C_{ij}^e = \iint_{S^e} N_i \mu N_j \, dx \cdot dy$　，　$f_i^e = \int_{C^e} g N_i \, dS$

したがって、領域全体の汎関数 $\chi(\phi) = \Sigma \chi^e(\phi)$ を最小化するには、全節点ベクトルを $\{\phi\}$ とすると、$\partial \chi(\phi)/\partial\{\phi\} = 0$ より、

$$[H]\{\phi\} + [C]\frac{\partial}{\partial t}\{\phi\} + \{F\} = 0 \qquad \cdots\cdots(6)$$

ここに、$H_{ij} = \Sigma h_{ij}^e$，$C_{ij} = \Sigma C_{ij}^e$，$F_i = \Sigma f_i^e$

ところで、(6)式は一般に非定常状態を表わすので、時間差分法によればよい。（ただし、初期条件；$\phi|_{t=0} = \phi(x, y; 0)$）

2-1. 浸透流のモデルと解析　図－2に示すような、貯水時の堤体において、上流側に動水圧 $P(t)/\gamma_0$ の発生す

る場合を考える。このとき，堤体の上流面における水頭は，$\phi_a(x,y,t)=H_a+P^{D}/\gamma_w$ とする。また浸潤面は，従来の節点を移動させて追跡する方法[3]では，初期の浸潤面の比較的正確な推定が要求され，コアの設定等による浸潤面の大きな変動に対し十分でないので，本研究では，この変動に対応できるように移動節点の範囲を広げ，かつ時間差分にも対応できるよう解析プログラムを作製した。

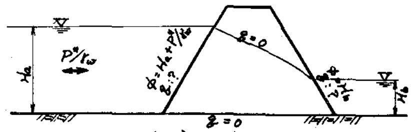


図-2．浸透流解析モデル

3.構造物と水系の連成振動　図-3に示すような，構造物との境界をもつ二次元平面の流体を考える。さらに水の圧縮性を無視すると，動水圧 p は次式を満たす。

$$\partial^2 p/\partial x^2+\partial^2 p/\partial y^2=0 \quad \cdots\cdots 7)$$

このとき，境界条件として

$$\left.\begin{array}{l} y=0;\ \partial p/\partial y=0\ ,\ y=H;\ p=0 \\ \text{構造物との境界上};\ \partial p/\partial n+g_p=0\ \ (n:\text{境界外向法線方向}) \end{array}\right\}\cdots\cdots 8)$$

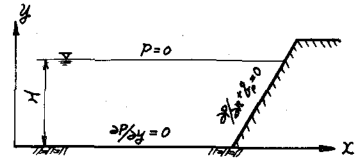


図-3．境界条件

したがって，以下，浸透流の場合と同様にして，$(k_x=k_y=1)$ 浸透流における6)式に相当する式は，

$$[H']\{P\}+\{F\}=0 \quad \cdots\cdots 9)$$

ここに，$H'_{ij}=\Sigma h^e_{ij}$，$F_i=\Sigma f^e_i$，ただし，$h^e_{ij}=\iint_{s^e}[\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}]\,dx\,dy$，$f^e_i=\int_{c^e}g_p N_i\,dS$ であって，$\{f\}^e$ は構造物との境界においてのみ存在する。

そこで，図-4のように，構造物と水との境界面において，三角形要素 i,j,m を考える。構造物に境界面上の垂直変位 U_n が生じるとき，境界面における g_p は

$$g_p=-\partial p/\partial n=-\rho\ddot{U}_n \quad \cdots\cdots 10)$$

ここに，U_n は，境界における構造物の節点変位 $\{\delta\}^{eT}_c=\{u_i,v_i,u_j,v_j\}$ を用いて，

$$U_n=[\bar{N}]\{\delta\}^e_c \quad \cdots\cdots 11)$$

ただし，$[\bar{N}]=-1/L\,[b_mN_i,\ c_mN_i,\ b_mN_j,\ c_mN_j]$ である。

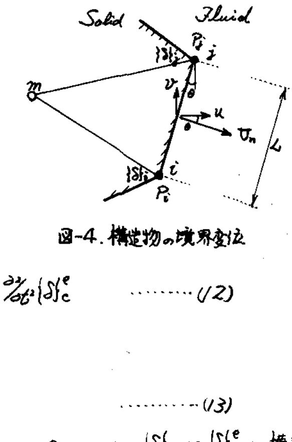


図-4．構造物の境界変位

したがって，前出の外力項 $\{f\}^e$ は $\begin{bmatrix}N_i\\N_j\end{bmatrix}=[N']^T$ とすると，

$$\{f\}^e=\int_{c^e}[N']^T g_p\,dS=\int_{c^e}[N']^T(-\rho\ddot{U}_n)\,dS=\int_{c^e}[N']^T[-\rho[\bar{N}]\,\partial^2/\partial t^2\{\delta\}^e_c]\,dS=-[S]^e\,\partial^2/\partial t^2\{\delta\}^e_c \quad \cdots\cdots 12)$$

ただし，$[S]^e=\int_{c^e}[N']^T\rho[\bar{N}]\,dS$ である。

かくして，9)式より，発生する動水圧 $\{P\}$ は次式で与えられる。

$$\{P\}=[H']^{-1}[S]\,\partial^2/\partial t^2\{\delta\}_c \quad \cdots\cdots 13)$$

ここに，$[S]$ は $[S]^e$ を水の系全体に拡張したもので，構造物との境界以外では0であり，$\{\delta\}_c$ は $\{\delta\}^e_c$ を構造物と水との境界節点において重ね合わせたものである。

ここで，図-5のように，構造物表面に発生する動水圧を，節点力 $\{F\}_c$ に換算したものは，構造物への抵抗力と考えられ，次式で与えられる。

$$\{F\}_c=\int_c[\bar{N}]^T p\,dS=\int_c[\bar{N}]^T[N']\{P\}\,dS=1/\rho\,[S]^T\{P\} \quad \cdots\cdots 14)$$

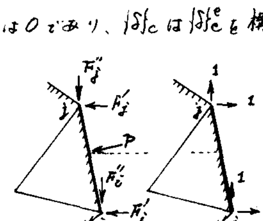


図-5．表面圧力と節点力の仮想仕事系

したがって，構造物全体についての運動方程式は，13)および14)式を用いて，

$$[K]\{\delta\}+[C]\,\partial/\partial t\{\delta\}+[M]\,\partial^2/\partial t^2\{\delta\}+[M_o]\,\partial^2/\partial t^2\{\delta\}_c+\{R\}=0 \quad \cdots\cdots 15)$$

ここで，$[K]$；剛性マトリックス，$[C]$；減衰マトリックス，$[M]$；質量マトリックス，$\{R\}$；強制力，

$[M_o]=1/\rho\,[S]^T[H']^{-1}[S]$ であって，動水圧の影響を付加質量として取り扱うことができることが分る。

以上をもとに，貯水時堤体の振動および浸透流解析を行なったが，結果の報告は，講演時にゆずる。

参考文献　1) O.C. Zienkiewicz ; The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill.
2) 畑野正，渡辺啓行 ；「アースダムの振動解析」，土木学会論文報告集．164号 1969年4月．
3) 川本眺万 他 ；「堤体および基礎における浸透流の有限要素解析について」，土と基礎．1970年12月．