V — 4　　仮想外力を用いた一動的応答解析手法

熊本大学　正員　○平井一男
同　　　　　　　　西山安夫

一般に多質点系の運動方程式

$$\mathbb{M}\ddot{w} + \mathbb{K}w = \mathbb{F} \qquad (1)$$

が与えられた時、この式を直接解くには step by step による数値計算法が考えられている。これは Newmark が β 法と云われる解析手法を提案して以来同様な解析手法がいくつか発表されている。しかし、このレスポンスはある仮定のもとに近似的に解いているので解析手段として誤差を含み，それが大きいと計算途中において発散して以後の計算が不可能となってしまう。ここでこの trouble を減少させる一つの方法を提案する。

［理論］　線形加速度法によると、ある時刻における加速度 $\ddot{w}_{n-1}$，速度 $\dot{w}_{n-1}$，変位 w_{n-1}，が与えられていると h 時間後のレスポンスは次式より求められる。

$$\ddot{w}_n = \mathbb{Q}(\mathbb{F}_n - \mathbb{K}\mathbb{B}_n) \quad (2) \qquad \dot{w}_n = \dot{w}_{n-1} + \frac{h}{2}(\ddot{w}_{n-1} + \ddot{w}_n) \quad (3)$$

$$w_n = \mathbb{B}_n + \frac{h^2}{6}\ddot{w}_n \quad (4)$$

$$\mathbb{Q} = \left(M + \frac{h^2 K}{6}\right)^{-1} \quad (5) \qquad \mathbb{B}_n = w_{n-1} + h\dot{w}_{n-1} + \frac{h^2}{3}\ddot{w}_{n-1} \quad (6)$$

この Eqs.(2),(4) を Eq(1) の左辺に代入すると $\mathbb{F}_n$ となり Eq(1) を満足していることがわかる。しかし、0～h 時間内の任意の時間 Δt，ここに $0 \leqq \Delta t \leqq h$，に対してはこの $\ddot{w}_n$ と w_n とを Eq(1) に代入しても左辺 $= \mathbb{F}_n$ とはならない。線形加速度法では加速度は h 時間中に $\ddot{w}_{n-1}$ から $\ddot{w}_n$ に直線的に変化するので，これを以下のように式であらわす。

$$C_n = \frac{1}{h}(\ddot{w}_n - \ddot{w}_{n-1}) \quad (7)$$

とおくと Δt における加速度 $\ddot{w}_{nt}$ は次式より決定できる。

$$\ddot{w}_{nt} = \ddot{w}_{n-1} + C_n \Delta t \quad (8)$$

また，Δt における変位 w_{nt} は Eq(4) より

$$w_{nt} = \mathbb{B}_{nt} + \frac{\Delta t^2}{6}\ddot{w}_{nt} \quad (9) \qquad \mathbb{B}_{nt} = w_{n-1} + \Delta t\dot{w}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{3}\ddot{w}_{n-1} \quad (10)$$

Eqs.(8),(9) によりあらわされる $\ddot{w}_{nt}$ と w_{nt} とを Eq.(1) の左辺に代入すると Δt においてその質点系に作用すべき外力が求まる。この時左辺 LHS は

$$LHS = (M\ddot{w}_{n-1} + \mathbb{K}w_{n-1}) + \Delta t(MC_n + \mathbb{K}\dot{w}_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2}\mathbb{K}\ddot{w}_{n-1} + \frac{\Delta t^3}{6}\mathbb{K}C_n \quad (11)$$

いま $\mathbb{F} + \Delta\mathbb{F}$ を系に作用させてみる。この時 Eq(1) の運動方程式は

$$M\ddot{w}_A + \mathbb{K}w_A = \mathbb{F} + \Delta\mathbb{F} \quad (12)$$

これを線形加速度法で解けば Eqs.(2)～(6) の表現がそのまま使用できて

$$\ddot{w}_{An} = \mathbb{Q}(\mathbb{F}_n + \Delta\mathbb{F}_n - \mathbb{K}\mathbb{B}_{An}) \quad (13) \qquad \dot{w}_{An} = \dot{w}_{A(n-1)} + \frac{h}{2}(\ddot{w}_{A(n-1)} + \ddot{w}_{An}) \quad (14)$$

$$w_{An} = \mathbb{B}_{An} + \frac{h^2}{6}\ddot{w}_{An} \quad (15) \qquad \mathbb{B}_{An} = w_{A(n-1)} + h\dot{w}_{A(n-1)} + \frac{h^2}{3}\ddot{w}_{A(n-1)} \quad (16)$$

また、Δt 時間中におけるレスポンスも Eqs.(7)～(10) の表現が利用でき

$$\ddot{w}_{Ant} = \ddot{w}_{A(n-1)} + C_{An}\Delta t \quad (17) \qquad w_{Ant} = \mathbb{B}_{Ant} + \frac{\Delta t^2}{6}\ddot{w}_{Ant} \quad (18)$$

$$\mathbb{B}_{Ant} = w_{A(n-1)} + \Delta t\dot{w}_{A(n-1)} + \frac{\Delta t^2}{3}\ddot{w}_{A(n-1)} \quad (19) \qquad C_{An} = \frac{1}{h}(\ddot{w}_{An} - \ddot{w}_{A(n-1)}) \quad (20)$$

これらの $\ddot{\boldsymbol{w}}_{Ant}$ と $\boldsymbol{w}_{Ant}$ とを Eq(12) の左辺に代入してみると，左辺 LHS_A は

$$LHS_A = (\mathbb{M} + \frac{\Delta t^2}{6}\mathbb{K})\ddot{\boldsymbol{w}}_{Ant} + \mathbb{K}\mathbb{B}_{Ant} \tag{21}$$

$$\ddot{\boldsymbol{w}}_{Ant} = \ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)} + \left\{\mathbb{Q}(\mathbb{F}_n + \Delta\mathbb{F}_n - \mathbb{K}\mathbb{B}_{An}) - \ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)}\right\}\frac{\Delta t}{h} \tag{22}$$

Eqs.(19) と(22) とを Eq(21) に使用して

$$\begin{aligned} LHS_A = {} & (\mathbb{M}\ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)} + \mathbb{K}\boldsymbol{w}_{A(n-1)}) + \left[\mathbb{M}\left\{\mathbb{Q}(\mathbb{F}_n + \Delta\mathbb{F}_n - \mathbb{K}\mathbb{B}_{An}) - \ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)}\right\}\frac{1}{h} + \mathbb{K}\dot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)}\right]\Delta t \\ & + (\frac{1}{2}\mathbb{K}\ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)})\Delta t^2 + \frac{\mathbb{K}}{6h}\left[\mathbb{Q}(\mathbb{F}_n + \Delta\mathbb{F}_n - \mathbb{K}\mathbb{B}_{An}) - \ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)}\right]\Delta t^3 \end{aligned} \tag{23}$$

ここで h 時間中に作用する LHS_A の力積の平均が $\mathbb{F}_n$ となるように $\Delta\mathbb{F}_n$ を決定することを試みる。この力積の平均は Eq.(23)より次のごとく表わされる。

$$\begin{aligned} I & = \frac{1}{h}\int_0^h LHS_A \, d\Delta t \\ & = (\mathbb{M}\ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)} + \mathbb{K}\boldsymbol{w}_{A(n-1)}) + \left[\mathbb{M}\left\{\mathbb{Q}(\mathbb{F}_n + \Delta\mathbb{F}_n - \mathbb{K}\mathbb{B}_{An}) - \ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)}\right\}\frac{1}{h} + \mathbb{K}\dot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)}\right]\frac{h}{2} \\ & \quad + (\frac{1}{2}\mathbb{K}\ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)})\frac{h^2}{3} + \frac{\mathbb{K}}{6h}\left[\mathbb{Q}(\mathbb{F}_n + \Delta\mathbb{F}_n - \mathbb{K}\mathbb{B}_{An}) - \ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)}\right]\frac{h^3}{4} \end{aligned} \tag{24}$$

これより $I = \mathbb{F}_n$ とおいて $\Delta\mathbb{F}_n$ が次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta\mathbb{F}_n = {} & 2(\mathbb{M} + \frac{h^2}{6}\mathbb{K})(\mathbb{M} + \frac{h^2}{12}\mathbb{K})^{-1}\left[\left\{\mathbb{I} - \frac{1}{2}(\mathbb{M} + \frac{h^2}{12}\mathbb{K})\mathbb{Q}\right\}\mathbb{F}_n \right. \\ & \left. - \left\{\frac{1}{2}(\mathbb{M} + \frac{h^2}{4}\mathbb{K})\ddot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)} + \frac{h}{2}\mathbb{K}\dot{\boldsymbol{w}}_{A(n-1)} + \mathbb{K}\boldsymbol{w}_{A(n-1)} - \frac{1}{2}(\mathbb{M} + \frac{h^2}{12}\mathbb{K})\mathbb{Q}\mathbb{K}\mathbb{B}_{An}\right\}\right] \end{aligned} \tag{25}$$

この $\Delta\mathbb{F}_n$ を用いて与系のレスポンスを線形加速度法により求めることができる。ただし、実際の計算にあたってはこの $\Delta\mathbb{F}_n$ は $\mathbb{F}_n$ に比べて或程度小さいことが要求されるであろう。このためには、h は必然的に小さい値となることが要求される。

参考文献

1. O.C.Zienkiewicz : The Finite Element Method, McGraw, 1970. p. 182
2. 河島 : 動的応答解析，培風館，1972， p 153～156，p53.
3. N.M.Newmark : A Method of Computation for Structural Dynamics, ASCE, EM3, p 67～94
4. 川井 : マトリックス法振動および応答，培風館，1970， p 81
5. E.L.Wilson ; Elastic Dynamic Response of Axisymmetric Structures, Report No.69-2, Jan, 1969, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, California.
6. R.W.Clough : Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Responce, Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Aug, 1969, Tokyo, Japan.