V — 3　平衡マトリックスを用いた骨組構造解析についての応用

熊本大学工学部　正員　三池亮次

同　上　学生員　村上　司

同　上　学生員　○白崎　博

1．はじめに，中間荷重および温度荷重の作用する場合の，任意軸形状と断面を有する一部材の，剛性マトリックスおよび固定端断面力を求める一般式を，平衡マトリックスを用いて誘導する問題については，さきに発表したとおりであるが[1),2)]，この一般式を用いて，弾性固定アーチと曲がりばりの構造解析を試みたので報告する。

任意形状部材（i，j）のi端およびj端における部材座標軸の変換マトリックスをT_{iji}，T_{ijj}とし，i端における部材断面力および変位の，部材および基準座標軸に対する値を$\bar{P}_{iji}$，P_{iji}，$\bar{d}_{iji}$，d_i，j端におけるそれを$\bar{P}_{ijj}$，P_{ijj}，$\bar{d}_{ijj}$，d_j，端iを開放したときの（i，j）部材の中間荷重によるj端の断面力の部材および基準座標軸に対する適荷重常数$\bar{P}_{Lijj}$，P_{Lijj}，ij間の平衡マトリックスをH_{ij}，その部材平衡マトリックスを$\bar{H}_{ij}$とすれば，

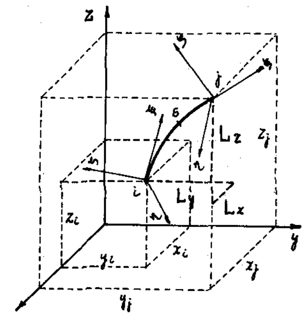

図-1．任意形状部材の基準および部材座標

$$H_{ij} P_{iji} + P_{ijj} - P_{Lijj} = 0 \qquad (1)$$

$$\bar{P}_{ijj} = \bar{H}_{ij} \bar{P}_{iji} + \bar{P}_{Lijj} \qquad (2)$$

であり

$$\bar{d}_{iji} = \left\{ -\int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} \bar{F}_{es} \bar{H}_{is}\, ds \right\} \bar{P}_{iji} + \left\{ -\int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} \bar{F}_{es} \bar{P}_{Liss}\, ds - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} C_t\, ds \right\} + \bar{H}_{ij}^{(t)} \bar{d}_{ijj} \qquad (3)$$

が成立する。ここに

$$\bar{F}_{es} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & & & & 0 \\ & \frac{K_\eta}{GA} & & & & \\ & & \frac{K_\zeta}{GA} & & & \\ & & & \frac{K_\xi}{GI_\xi} & & \\ & & & & \frac{1}{EI_\eta} & \\ 0 & & & & & \frac{1}{EI_\zeta} \end{bmatrix}, \qquad C_t = \begin{bmatrix} C\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C\alpha_\eta \\ C\alpha_\zeta \end{bmatrix} \qquad (4)$$

で，E，G，A，I_ξ，I_η，I_ζ，K_ξ，K_η，K_ζ．は，ヤング率，せん断弾性係数，断面積，各軸のまわりの断面二次モーメントおよび定数，C，Δt，α_η，α_ζは膨脹係数，部材平均温度上昇，各軸のまわりの温度こう配，$\bar{H}_{is}$，$\bar{P}_{Liss}$は，部材端iと部材軸上任意点S間の部材平衡マトリックスおよび荷重常数である。

2，弾性固定アーチへの適用　任意形状部材（i，j）のj端が弾性固定の場合は，j端すなわち，アバットメントにおける変位$\bar{d}_{ijj}$はj端の断面力$\bar{P}_{ijj}$によって一義的に決定することができる。$\bar{F}_{ijj}$を基礎の弾性定数マトリックスとすれば，

$$\begin{aligned} \bar{d}_{ijj} &= -\bar{F}_{ijj} \bar{P}_{ijj} \\ &= -\bar{F}_{ijj}\left(\bar{H}_{is}\bar{P}_{iji} + \bar{P}_{Lijj}\right) = -\left(\bar{F}_{ijj}\bar{H}_{is}\bar{P}_{iji} + \bar{F}_{ijj}\bar{P}_{Lijj}\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

(5)式を(3)式に代入すれば

$$\bar{d}_{iji} = -\left\{ \int_i^j \left(\bar{H}_{is}^{(t)} \bar{F}_{es} \bar{H}_{is} \right) ds + \left(\bar{H}_{ij}^{(t)} \bar{F}_{ijj} \bar{H}_{ij} \right) \right\} \bar{P}_{iji}$$

$$- \left\{ \int_i^j \left(\bar{H}_{is}^{(t)} \bar{F}_{es} \bar{P}_{Liss} \right) ds + \int_i^j \left(\bar{H}_{is}^{(t)} C_t \right) ds + \bar{H}_{ij}^{(t)} \bar{F}_{ijj} \bar{P}_{Lijj} \right\} \quad (6)$$

$$= -\bar{F}_{ij} \bar{P}_{iji} + \bar{d}_{Liji}$$

である。

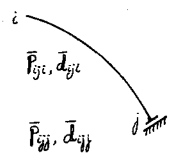

図-2. 弾性固定支承上のはり

例題として，図-3に示すような等分布水圧荷重と温度荷重を受ける等厚円弧アーチにおいて，クラウン0で切断し，クラウンで不静定力 $\bar{P}_o^{(t)} = [N, Q, M]_o$ のクラウンにおける変位 $\bar{d}_o = [d_\xi, d_\eta, \theta]$ を求める。

この場合には，(6)式の $\bar{H}_{is}$ を $\bar{H}_{os}$，$\bar{F}_{ijj}$ を $\bar{F}_A$ として

$$\bar{H}_{os} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_{es} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & 0 \\ & \frac{K}{GA} & \\ 0 & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha \end{bmatrix}$$

であり

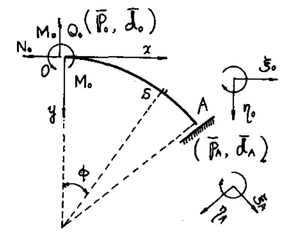

図-3. 弾性固定アーチクラウン，アバットメントにおける断面力と変位

$$\bar{H}_{os}^{(t)} \bar{F}_{es} \bar{H}_{os} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}^{(t)} \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & 0 \\ & \frac{K}{GA} & \\ 0 & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha \end{bmatrix}$$

で，そのマトリックスの1行1列要素 δ_{11}，1行2列要素 δ_{12} は，

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\cos^2\phi + \frac{K}{GA} + \frac{1}{EI} y^2 \qquad \delta_{13} = \cdots\cdots$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EA}\cos\phi \sin\phi - \frac{K}{GA}\cos\phi \cdot \sin\phi - \frac{1}{EI} x \cdot y \qquad \delta_{22} = \cdots\cdots$$

$$\bar{H}_{oA}^{(t)} \bar{F}_A \bar{H}_{oA} = \begin{bmatrix} \cos\phi_A & \sin\phi_A & 0 \\ -\sin\phi_A & \cos\phi_A & 0 \\ y_A & -x_A & 1 \end{bmatrix}^{(t)} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi_A & \sin\phi_A & 0 \\ -\sin\phi_A & \cos\phi_A & 0 \\ y_A & -x_A & 1 \end{bmatrix}$$

の，1行2列要素は，

$$\delta_{12}' = \beta \cos\phi_A \cdot \sin\phi_A - \gamma \cos\phi_A \cdot \sin\phi_A + \alpha_2 (x_A \sin\phi_A + y_A \cos\phi_A) - \alpha x_A \cdot y_A$$

同様にして，$\bar{H}_{os}^{(t)} \bar{F}_{es} \bar{P}_{Liss}$，$\bar{H}_{os}^{(t)} C_t$，$\bar{H}_{oA}^{(t)} \bar{F}_A \bar{P}_{Liss}$，の要素として，アーチダム解析で周知の式を得ることができる。曲がりばり解析例については講演時に述べる。

参考文献

1) 三池亮次："マトリックス骨組構造解析における2,3の問題"コンピューターによるマトリックス構造解析法講習会，日本鋼構造協会 昭和46年3月

2) 三池亮次他："任意形状部材の平衡および剛性マトリックスの誘導"土木学会年次学術講演会．昭和46年10月

3) 太地洋三："構造解析とコンピューター" 産業図書．昭和46年5月

4) L.R.Wang："Parametric Method of Some Structural Members" Proc. A.S.C.E. ST8. Aug. 1970.

5) J.L. Serafim and others："Complete Adjustment Method for Analyzing Arch Dam" Proc. A.S.C.E. Aug. 1970