

I. 緒言 先に土の等方硬化理論について断片的な報告を行った(土木学会27回年次講演集及びその補足資料)。その後、実験値による多少の数付けを得られたので、ここにその主要な基礎論を体系的にまとめ置く。なお、ここに導いた諸論は従来、Roscoe他により、正規圧近傍の土の挙動に關して報告された貴重な資料のもとに、近來、金屬塑性の分野で發展された等方硬化法則の援用により、これに對比し得る土の數理等方硬化理論としてまとめたものである。

主な記号 本論文においては応力、歪等の符号は伸張を正とし、歪等の変形に關する諸量の弾、塑性成分には大々、右肩に P を付ける。また、応力は全て、間隙圧を差し引いた有効応力の意味するものとする。 σ_{ij} : 応力, δ_{ij} : Kronecker's delta, $P = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$, $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - P\delta_{ij}$, $I = (\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{\frac{1}{2}} = (2J_2)^{\frac{1}{2}}$ (J_2 : 2次応力不変量), $S = (\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{\frac{1}{3}} = (3J_3)^{\frac{1}{3}}$ (J_3 : 3次応力不変量), $t_{ij} = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma'_{ij}} = \sigma'_{ik}\sigma'_{kj} - \frac{1}{3}\sigma'_{ii}\delta_{ij}$, $\eta = \frac{I}{P}$, $\sin 3\theta = -\sqrt{6}(\frac{\eta}{I})^3$, $u_{ij} = \frac{\partial \sin 3\theta}{\partial \sigma'_{ij}} = -\frac{1}{3}(\sin 3\theta \sigma'_{ij} + \sqrt{6} t_{ij})$, ϵ_{ij} : 歪, $v = \epsilon_{ij}\delta_{ij}$, $\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}v\delta_{ij}$, $d\epsilon'_{ij} = (d\epsilon'_{ij}d\epsilon'_{ij})^{\frac{1}{2}}$, $d\epsilon'_s = (d\epsilon'_{ij}d\epsilon'_{ij}d\epsilon'_{ij})^{\frac{1}{3}}$, e : 間隙比, $V = 1 + e$ (体積比, specific volume)

II. 構成法則

(1) 硬化の要因について 土その他の粒子の集合体においては塑性変形は構成粒子の相互すべり、回転等の粒子の位置移動から生じると考えられる。また、これらの運動が妨害されることによって、硬化が進展すると考えられる。然るに相互すべり、回転等の妨害の最大要因は構成粒子がこれらの運動自身によって、より密な(同一圧下で体積が小さい)状態へ移行する、即ち、塑性的な体積変化を生じて粒子運動が束縛されることであると思われる。更に一般には、このために、粒子表面粗度の増大、interlockingの増強、更には粒子破砕、電気化学的影響等による非回復な状態変化も硬化の要因になると考えられる。また、これらが異方的に發生する。これらの複雑な硬化要因、異方性の配應は今後の究明に待つ。本論文においては塑性的体積歪を硬化尺度として、上の塑性構成法則を導き出す。

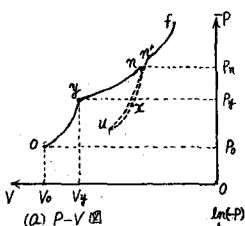
(2) 構成法則設定に際しての仮定 a) Poorooshasb (Can. Géot., 1967) は塑性歪増分方向と応力増分方向の類似性を主張し、Lewin & Burland (Géot. 1970) はこれを否定している。これらの実験結果の差は前者が異方性の著しくない試料(粒子形状が球形に近い砂)に等方圧、軸圧、或いは用圧一定の排水三軸試験等を行ったを対象としたのに対し、後者が著しく異方性の発達した試料(異方性が発達し易い薄片状粒子からなるKaolin typeの試料に、1/4異方圧、或、応力増分を与えた)を対象としたことに基くと思われる。従って一般に金屬では大きな異方履歴を受けて方向性を生じると負荷面(後述降伏面)にCorner (いわゆる尖角ではなく、曲率大なコブのようなもので、垂直条件は維持されると思われる)が発達する(自島他、日本機械学会論文集, 1967)。土においても、これと同様の現象が生じるとすれば、著しく異方履歴を受けた試料では、その負荷面のCorner近傍で応力増分を与えると、従来の精度の実験では、みかけ上、塑性歪増分方向が一方向に決まらない結果が得られると推察される。反面、Poorooshasb他のように異方性の発達し難い試料に、1/4 Corner外の負荷面上で応力増分を与えれば、彼等の主張するような結果が得られると思われる。以上の論拠に基き、本論文では滑らかな単一負荷面**を仮定し、また、その面上、いずれの点においても、垂直条件 $d\epsilon'_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\epsilon_{ij})}{\partial \sigma'_{ij}}$ ……(2.1) が成り立つと仮定する。ここで、 $f(\epsilon_{ij})$ は負荷関数、 λ は正值のスカラー比例係数。b) 本論文では材料の等方性を前提としているので、 $f(\epsilon_{ij})$ は応力不変量の関数であるが、更に負荷面は主応力空間における原素に關して相似性を維持すると仮定する。従って、前節で述べた塑性体積歪を硬化尺度とすることを考慮して、負荷条件式 $f(\epsilon_{ij}) - F(v) = 0$ ……(2.2) が成り立つことに、 $F(v)$ は v をパラメータとする硬化関数。また、 $f(\epsilon_{ij})$ は応力に關する同次関数であるが、以下、これを1次に還元にする。なお、本仮定の可否については、直接、これを支持するRoscoe, Poorooshasb等の実験結果もあるが、あくまで、本仮定下で導かれる構成法則などの程度、土の實際挙動を説明し得る能力によって判断されねばならない。

(3) 等方圧強に關するTerzaghi式に基く弾塑性体積歪の解析 式(2.2)を仮定する場合、金屬塑性においては等方引張、撓り試験等を実施して、硬化関数(パラメータは v の代りに W)を決定するが、これらの試験においては異方性の発達を伴う。従って、(1)節で述べたように土等の粉粒状体は塑性的体積歪によって硬化が進展するので、等方圧強試験により、異方性の発達の影響を伴わずに硬化関数を決定できる。本節では後節で構成法則を導出する準備として、土の等方圧強に對して広く認められているTerzaghi式に關して弾塑性体積歪の定義を明らかにしておく。なお、本式は干ばれ飽和粘土に對して提議された式であるが、砂その他の粉粒状体に對しては広く成立すると思われる。従って、図-1(a)には等方圧強試験にお

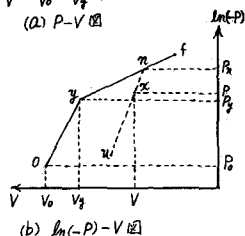
* 塑性変形が粒子の移動に基くものに対して、弾性変形は粒子自身の弾性変形によると思われる。また、土粒子の場合にはその組成が一般に非線形弾性挙動を示す岩石等であることが、土の弾性挙動の非線形性を起因していると考えられる。

** Roscoe & Burland (Engng. Plasticity, 1968) は彼等が仮定した構内負荷面による偏歪歪が実験値を下回る誤を修正すべく、 P による平行な他の負荷面(3次元的にはMises typeに近しいと思われる)を併設しているが、硬化関数等に關する考慮がなされておらず、無理な修正であると思われる。

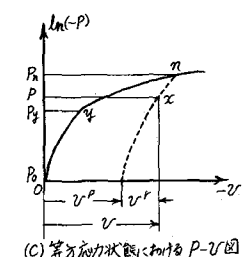
ける圧力と体積比の関係を示す初期状態 $O(P=P_0, V=V_0)$ から加圧すると加圧すると実質 $(P=P_g, V=V_g)$ で降伏し更に圧縮を進行させると降伏圧力が増大(硬化)して正規圧縮線 np を描く。これ、変形からまた降伏後、再度加圧すると変形で再び降伏し、その後、降伏履歴を忘却して正規圧縮線 np を描く。以上の等方圧縮特性は片対数表示すると図-1(b)のように正規圧縮線 np はほぼ直線と示され、更に $0, n, u, n'$ 等の弾性(降伏・再降伏)線はいずれも互いに平行な直線と近似されること、Tergazhi の提案以来、一般に認められている。以下においてはこれらの特性を認めて体積歪の弾性歪成分の表示式を明らかにする。図-1(b)より初期弾性線 $0y$ は $V=V_0-K \ln(\frac{P}{P_0})$ (2.3) で与えられる。ここで、 K は弾性線の勾配を規定するもので、材料の初期状態 (P_0, V_0) 及び材料組成による材料定数 $(\frac{CM^2}{P_0^2})$ とみられる。式(2.3)より初期降伏変形 y_g は $V_g=V_0-K \ln(\frac{P_g}{P_0})$ とするが、本式を考慮して図-1(b)より正規圧縮線は $V=V_0-K \ln(\frac{P}{P_0})-\lambda \ln(\frac{P}{P_g})$ (2.4) で与えられる。ここで、 λ は正規圧縮線の勾配を規定するもので、 K と同様材料定数とみられる。体積比 V の弾性歪と塑性増分は式(2.3)及び(2.4)より、又、 $dV^e = -K \frac{dP}{P}$, $dV^p = dV - dV^e = -(\lambda-K) \frac{dP}{P}$ (2.5) で与えられる。



(a) P-V 図



(b) $\ln(P)$ -V 図



(c) 等方応力状態における P-V 図

図-1 土の圧縮試験図

とは周知の通りである。圧力が P なる任意変形における弾性歪及び塑性体積歪増分は式(2.5)より、 $dV^e = dV^r / [V_0 + \int_{P_g}^P dV^e + \int_{P_0}^{P_g} dV^r] = -K \frac{dP}{P} / [V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) - K \ln(\frac{P}{P_0})]$, $dV^p = dV / [V_0 + \int_{P_g}^P dV^e + \int_{P_0}^{P_g} dV^r] = -(\lambda-K) \frac{dP}{P} / [V_0 + \int_{P_g}^P dV^e + \int_{P_0}^{P_g} dV^r]$ (2.6) で与えられる。ここで、 P_n は変形を通る弾性線が正規圧縮線と交わる変形における P 値である変形歪の各成分は式(2.5)または(2.6)より、 $V^r = \int_{P_0}^P dV^r = \ln \left[\frac{(V_0 + \int_{P_g}^P dV^e + \int_{P_0}^{P_g} dV^r)}{(V_0 + \int_{P_g}^P dV^e)} \right] = \ln \left[\frac{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) - K \ln(\frac{P}{P_0})}{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P_g}{P_0}) - K \ln(\frac{P}{P_0})} \right]$, $V^p = \int_{P_0}^P dV^p = \ln \left[\frac{(V_0 + \int_{P_g}^P dV^e + \int_{P_0}^{P_g} dV^r)}{V_0} \right] = \ln \left[\frac{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g})}{V_0} \right]$, $V = V^r + V^p = \ln \left[\frac{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) - K \ln(\frac{P}{P_0})}{V_0} \right]$ (2.7) で与えられる。式(2.7)より、Tergazhi 式に従う土の圧力-体積歪図は大概、図-1(c)のようになる。

(3) 構成方程式 a) 負荷条件式 前節に述べたように、等方圧縮試験によって硬化関数を決定することにすれば、負荷条件式(2.2)は $f(\delta_{ij}) - P_n(V^p) = 0$ (2.8) と表わされ、負荷関数 $f(\delta_{ij})$ は円筒座標表示で

より $f(P, V, \sin \theta)$ で表わされるが等方圧縮 $(\delta_{ij}^p = 0)$ で $f = P$ であること及び応力に依存する同次関数 f (1次)であることを考慮すると $f(\delta_{ij}) = P_g (\eta, \sin \theta)$ (2.9) と表わしうる。ここで、 η は $\eta = \sqrt{3} \sin \theta$ の関数であるが等方圧縮 $(V = S = 0)$ で $\eta = 1$ を満たす。式(2.9)より、式(2.8)は $P_g (\eta, \sin \theta) - P_n(V^p) = 0$ (2.10) となる。b) 塑性歪増分-応力式 式(2.9)より $df - \frac{dP_n}{dV^p} dV^p = 0$ が得られるが本式に式(2.1)及び $dV^p = \lambda \frac{dP}{P}$ の関係と考慮すると $\lambda = df / (\frac{dP_n}{dV^p} \frac{dP}{P})$ (2.11) となる。地方式(2.6)から $\frac{dP_n}{dV^p} = \frac{\lambda-K}{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) - K \ln(\frac{P}{P_0})} P_n$ (2.12) であるので、これを式(2.11)を用いて、塑性歪増分-応力式 $dE_{ij}^p = -\frac{\lambda-K}{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) - K \ln(\frac{P}{P_0})} \frac{df}{f} \frac{1}{\partial f / \partial \delta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \delta_{ij}}$ (2.13) を得る。 V_0, λ, K 及び P_g が既知で、更に $f(\delta_{ij})$ の関数形が決定されていれば、 δ_{ij} に対して dE_{ij}^p が求まる。なお、塑性的体積歪及びその増分は式(2.7)及び(2.8)から $dV^p = -\frac{\lambda-K}{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) - K \ln(\frac{P}{P_0})} \frac{dP}{P}$, $V^p = \ln \left[1 - (\lambda-K) \ln \left(\frac{P}{P_g} \right) / V_0 \right]$ (2.14) で与えられる。また、塑性的体積増分は式(2.5)において、 P を f で置きかえて、 $dV^p = -(\lambda-K) \frac{df}{f}$ (2.15) で与えられる。

(4) 弾性歪の考慮について 式(2.7)からわかるように土は一般に非線形弾性体である。しかし、土の弾性挙動に因る充分な説明がなされておらず特に偏応力が作用下の妥当な所論は見当たらない。偏応力の考慮は弾性歪については実験特性の充分な説明がなされ次第で理論に組み入れたい。地方、等方応力による弾性歪成分については Tergazhi 式を認めて置かれた前節までの諸論を一貫させる意味で式(2.8)の弾性体積歪に基く弾性歪成分だけは無視しないこととすれば、弾性歪及びその増分は $dE_{ij}^e = -\frac{1}{3} dV^e \delta_{ij} = -\frac{1}{3} K \frac{dP}{P} \delta_{ij} / [V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) - K \ln(\frac{P}{P_0})]$, $E_{ij}^e = \frac{1}{3} V^e \delta_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \ln \left[\frac{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g})}{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P_0}{P_g})} \right]$ (2.16) で与えられる。

(5) 歪(増分)-応力式の結論 前節までに導いた歪(増分)-応力式を以下にまとめる。式(2.7), (2.13)及び(2.16)より

歪増分-応力式 $dE_{ij}^r = dE_{ij}^e + dE_{ij}^p = -\frac{1}{3} \frac{K \frac{dP}{P}}{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) - K \ln(\frac{P}{P_0})} \delta_{ij} - \frac{(\lambda-K) \frac{df}{f}}{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) - K \ln(\frac{P}{P_0})} \frac{1}{\partial f}{\partial \delta_{ij}}$ (2.17)

体積歪-応力式 $V = V^r + V^p = \ln \left[1 - \frac{K \ln(\frac{P}{P_0})}{V_0 - (\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g})} \right] + \ln \left[1 - \frac{(\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g})}{V_0} \right] = \ln \left[1 - \frac{(\lambda-K) \ln(\frac{P}{P_g}) + K \ln(\frac{P}{P_0})}{V_0} \right]$ (2.18)

取注 *、**の説明は後述に委ねる。

(6) 3軸試験状態における構成式 以上、一般3次元応力状態における構成法則を明らかにしたが、その特殊の場合として、従来、3軸試験に基づく実験結果が著しく異なり、本試験状態における構成式を与えておく。まず式(2.9)より $\frac{d\epsilon}{d\gamma} = \frac{d\epsilon}{d\gamma} + \frac{d\epsilon}{d\gamma} \propto \frac{d\epsilon}{d\gamma} = g - \frac{g}{2\gamma} \dots (2.19)$ の関係式を得る。ところで、3軸試験状態においては $\sin 3\theta$ は一圧(圧縮時+1, 伸張時-1)であるから $\frac{d\epsilon}{d\gamma} = g \dots (2.20)$ とおくと、式(2.19)の第1式は $\frac{d\epsilon}{d\gamma} = \frac{d\epsilon}{d\gamma} + g d\gamma \dots (2.21)$ となる。ここに、 $g = \frac{g}{2\gamma} \dots (2.22)$ である。以上の式(2.19~2.21)を式(2.13)に用いると本状態における塑性変増分応力 $d\epsilon_{ij}^p = -\frac{\lambda-K}{V_0-(\lambda-K)\ln(gP/P_0)} \frac{1}{g-\gamma g\gamma} \dots$ $(\frac{d\epsilon}{d\gamma} + g d\gamma) \frac{d\epsilon}{d\gamma} \dots (2.23)$ を得る。また、本状態においては2次の塑性変増分変量は $d\epsilon^p = \lambda \frac{d\epsilon}{d\gamma} = \lambda g\gamma = -\frac{\lambda-K}{V_0-(\lambda-K)\ln(gP/P_0)} \frac{1}{1-\gamma g} (\frac{d\epsilon}{d\gamma} + g d\gamma) \dots (2.24)$ で与えられる。なお、以上のうち本状態の塑性変増分をパラメータとして行うと都合がよいが、塑性変増分係数について式(2.17)及び(2.18)の第1項において $\gamma = P/g$ の置換を行うと算定が簡略化される。以下においては数種の代表的な3軸試験における構成式を与えておく。

(a) 非排水試験 (2)節で述べた Terzaghi の圧縮式から $(\frac{P_0}{P})^{\lambda} = (\frac{P_0}{P})^K$ の関係が得られるが、本式に $P_g = P/g$ の関係とを考慮すると非排水試験における応力経路 $P = P_g g^{\frac{K-1}{K}} \dots (2.25)$ を得る。また、本式から得られる関係 $\frac{d\epsilon}{d\gamma} = (\frac{K-1}{K}) g d\gamma$ を式(2.21)に考慮すると $\frac{d\epsilon}{d\gamma} = \frac{K}{K-1} g d\gamma$ となる。ゆえ、式(2.25)から $\frac{P}{P_g} = g^{\frac{K}{K-1}}$ なる関係と導かれるので、これを式(2.24)に用いると $d\epsilon^p = -\frac{\Gamma}{V_0 - \Gamma \ln f\gamma} \frac{1}{1-\gamma g} d\gamma$ となり、 $\Gamma = \frac{\lambda}{K}(\lambda-K) \dots (2.26)$ を得る。

(b) 排水試験 3軸排水試験において、1は1軸圧縮の軸圧 (σ_a) 一定、周圧 (σ_r) の平均応力一定試験における $d\epsilon^p$, E_a (軸歪) 及び E_r (周歪) の構成式を表記しておく。なお、体積歪 v は下式の P 値を式(2.18)に用いると容易に求まるので表記しない。なお、下式において $\Omega = (\frac{d\epsilon}{d\gamma}) / (\frac{d\epsilon}{d\gamma}) = \frac{g}{1-\gamma g}$ である。

排水試験条件		$P = \frac{P}{\gamma}$	$\frac{d\epsilon}{d\gamma} = (\frac{d\epsilon}{d\gamma} + g) d\gamma$	$d\epsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_a - d\epsilon_r $	E_a (軸歪)	E_r (周歪)
3軸圧縮	軸圧一定 $\sigma_a = \text{const.}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2\gamma} \sigma_a$	$(\frac{2}{\sqrt{3}-2\gamma} + \bar{g}) d\gamma$	$-\frac{\lambda-K}{V_0-(\lambda-K)\ln(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2\gamma}g)} \Omega \frac{d\epsilon}{d\gamma}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} (d\epsilon^p + v)$	$-\frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3}} (d\epsilon^p + \frac{1}{3} v)$
	周圧一定 $\sigma_r = \text{const.}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\gamma} \sigma_r$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}+\gamma} + \bar{g}) d\gamma$	$-\frac{\lambda-K}{V_0-(\lambda-K)\ln(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\gamma}g)} \Omega \frac{d\epsilon}{d\gamma}$		
	平均応力一定 $P = \text{const.}$	P_g	$\bar{g} d\gamma$	$-\frac{\lambda-K}{V_0-(\lambda-K)\ln g} \Omega \bar{g} d\gamma$		
3軸伸張	軸圧一定 $\sigma_a = \text{const.}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\gamma} \sigma_a$	$(\frac{2}{\sqrt{3}+2\gamma} + \bar{g}) d\gamma$	$-\frac{\lambda-K}{V_0-(\lambda-K)\ln(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\gamma}g)} \Omega \frac{d\epsilon}{d\gamma}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} (d\epsilon^p + v)$	$-\frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3}} (d\epsilon^p + \frac{1}{3} v)$
	周圧一定 $\sigma_r = \text{const.}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\gamma} \sigma_r$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}-\gamma} + \bar{g}) d\gamma$	$-\frac{\lambda-K}{V_0-(\lambda-K)\ln(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\gamma}g)} \Omega \frac{d\epsilon}{d\gamma}$		
	平均応力一定 $P = \text{const.}$	P_g	$\bar{g} d\gamma$	$-\frac{\lambda-K}{V_0-(\lambda-K)\ln g} \Omega \bar{g} d\gamma$		

III. 負荷関数について

前章において、土の一般構成法則を明らかにしたが、本章では前述した土の両極限状態と等価とみなせる負荷関数の具体的な形式について考察する。

(1) 負荷関数の設定条件 (a) 等正圧状態での体積歪のみが生じるので、 $\gamma=0$ で関数 g は $\frac{d\epsilon^p}{d\gamma} = \sqrt{[(\frac{d\epsilon}{d\gamma})^2 + (\frac{3}{2} \cos 3\theta \frac{d\epsilon}{d\gamma})^2]} = \sqrt{g^2 + (\frac{3}{2} \cos 3\theta \frac{d\epsilon}{d\gamma})^2} = 0 \dots (3.1)$ を満たさなければならない。*** (b) Roscoe 他は土が充分大の偏歪を受けた後には一定応力下で体積変化を伴わずに形状変化のみが進行することを見出し、Critical State (以下、C.S. と略記する) と名付けている。従って、C.S. においては $\frac{d\epsilon^p}{d\gamma} = \frac{d\epsilon}{d\gamma} = g - \gamma g = 0 \dots (3.2)$ を満たさなければならない。更に、Roscoe 他は Henkel, Parry 等の3軸試験結果から、C.S. における応力状態は形式的に粘着項を除去した Coulomb-Mohr 則 $|\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}| = \beta \dots (3.3)$ で近似されることを見出している。ここに σ_1, σ_3 は最大、最小主応力、 β は材料定数である。なお、この条件を満たす3次元応力状態への拡張式 (C.S. Surface) は前の拙論(土論集, 1972)で述べたように、凸面性を満たすものとして $\gamma = -\beta K a^{-\frac{1}{2}}$, $K_a = G_a - H_a \sin 3\theta$, $G_a = \frac{1}{\sqrt{3}} (\beta^2 + \gamma^2 + 3\beta^2)$, $H_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \beta (\beta^2 + \gamma^2) \dots (3.4)$ 、比較的凸面性の程度が低く Simple なものとして $\gamma = -2\sqrt{3} \beta K b^{-1}$, $K_b = 3 - \beta \sin 3\theta \dots (3.5)$ 等が与えられる***。

(2) 負荷関数 現在、負荷関数設定に当って、考慮し得る条件は前節で述べた負荷面の両極限状態に関する条件のみで、その中間域に関しては何ら明確な条件を規定(得ない)状態である。従って、負荷関数として無意味の関数形が与えられるが、前節の条件(a), (b) を満たし、次第に示すように塑性土に関する Wacker, Parry 等の実験値にある程度適合する関数として $f = P/g = P(1 + a(\frac{\gamma}{M})^2 + \frac{a-1}{2}(\frac{\gamma}{M})^3) \dots (3.6)$ を与えておく。ここに M は C.S. における γ の値

* Roscoe などの現時点の議論は $d\epsilon^p = d\epsilon^p / V = -K(dP/P)/V$, $d\epsilon^p = d\epsilon^p / V = -(\lambda-K)(dP/P)/V$ と定式化している。これらは自然(対数)歪の概念に基づくものではなく、誤りが行っているように $V = V_0 (\text{const.})$ とする場合、有限歪においてはかなりの誤差を生じる。更に、歪の算定には面倒な集積算を行わねばならない。上に定義した式(2.9)は自然歪の定義に厳密であると共に、煩雑な計算を要しない簡明な形を与えている。

** 負荷基準は次の通りである。塑性負荷時 $d\epsilon_{ij}^p > 0$, $d\epsilon > 0$, $f = P_n$; 中立負荷時 $d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon = 0$, $f = P_n$; 除荷の瞬間 $d\epsilon_{ij}^p = 0$, $d\epsilon < 0$, $f < P_n$ 。

*** 式(3.1)については緒言に記した誤植を参照。なお、等正圧状態での負荷面が充分小であるとは断定できない。本状態から偏歪(歪)を急激に増大させると、偏歪増大が失われることと見られる(例として、前述の Poorooshasb 他との文献の誤記(通称誤))。また、このような負荷面が認められる時には、負荷関数として式(3.1)に拡張しても(等正圧圧縮については別途考慮して)、Simple な関数と仮定する方が得策な場合があると思われる。

*** C.S. Surface 自体は負荷面ではなく、凸面性が保証される必要はない。

で、 $\sin 3\theta$ の関数、従って $M = M(\sin 3\theta)$ …… (3.7) である。従い、 α は以下に述べるように一般に M の関数であると思われる。さて、C.S. における P 値を P_0 とおけば、Henkel, Parry, 柴田・軽部等の実験値 (3軸非排水圧縮伸張の結果から式 (2.25) に約計算) 等から導かれる、同一負荷面上の P_0 と P_u の比 $\ell = \frac{P_0}{P_u}$ は一定ではないと思われる。従って式 (3.6) より $\ell = \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}$ であるが、 $\alpha = \alpha M^2$ (α : 材料定数) …… (3.8) を仮定すれば式 (3.6) は $f = P \left\{ 1 + \alpha \gamma^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} - \frac{1}{1-\beta} \right) \gamma^3 \right\}$ …… (3.9) となる。ここで M 値の具体形として式 (3.5) を採用すれば $f = P \left[1 + \alpha \gamma^2 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2\beta} K_b + \left(\frac{K_b}{2\beta} \right)^2 \right\} \gamma^3 \right]$ …… (3.10) なる負荷関数を得る。本式に基づく塑性増分応力式は $dE_p^* = \frac{1}{3} \{ 1 - \alpha \gamma^2 - \gamma^3 K_b (\alpha - K_b) \} d\gamma + \{ 2\alpha + \frac{3}{2} \gamma K (\alpha - K) \} \frac{E_p^*}{P} dP + \frac{P}{4\beta} \gamma^3 (3K - \alpha) d\beta$ …… (3.11) と定えられる。

IV. 実験値との比較

紙数の関係上、十分に余裕がある上に得られた塑性法則により推定される歪

(ここでは $\alpha = 1$ とした) を 3 軸試験値の実測値及び Roscoe

& Burland, Calladine (Geot., 1971) の所論による算

定値と比較してみる。ここでは γ 及び dE_p^* の代りに $\epsilon = \sqrt{3} \gamma$

及び $E_p^* = \sqrt{3} dE_p^*$ を用いる。図-2及び3には 3 軸圧縮、伸張試

験との比較を示しているが本論による推定値は比較的良好である。

多少のズレは α を更に適宜に選ぶことによって修正し得ると思われる。

Roscoe 地の所論による推定値は彼等自身認めているようにかなり過

小評価する傾向があるが、Calladine についてと同様のことが言える。

図-4には 3 軸状態における負荷面及び非排水試験能力経路

の無次元表示を示す。非排水能力経路の実測値の示す圧縮

側についてのみでは、本論による能力経路は実測経路と大に差

は見られない。伸張側については実測値との比較はないが、Roscoe 地の場合には

C.S. において前節の条件 (b) に抵触する欠点があると思われる。また、Calladi-

ne の所論によれば伸張の非排水経路が圧縮のそれより外側であるが、Hen-

kel, Parry, 柴田・軽部等の実験結果によれば、一般にこのようなことはあり得ない

と思われる。これは Calladine の所論が 2 次元でしかなく縮命であるため、彼は伸張

試験との比較は行っていないが、実測値よりはるかに過小評価をすると思われる。

結 言 以上、紙数の関係上、詳細に至っては述べ得ないが土の等方硬

化法則を体系的に紹介した。なお、II, III 章における一般論は主としてのみならず、

ある種の粉粒状土体に対しては同様の所論が適用し得ると思われる。また、IV 章に

おける負荷関数は粉粒状土に関する数変数者の実測値に適合する単純な

関数として導かれたもので何らかの物理的必然性を有するものではない。例として、砂

に対しては、むしろ $f = P \left\{ 1 - C \gamma + \left(\frac{C}{\beta} \right)^2 \right\}$ (M : C.S. における γ 値) と C を間隙比

の関数とする Porroshash 等の実験値によく適合すると思われる。負荷関数については 3 軸圧縮のみならず、

一般 3 次元能力面の多くの実測値への適用が望まれる。なお、ここに紹介した塑性法則はあくまで、塑性体積変化を硬化尺度とする等方性の前提下にお

けるもので、一応厳密な硬化パラメータ、異方性の発達等について、今後研究を進めたいと思っている。

注釈 - Calladine の報告について - ここに、明らかに本所論と全く異なる見方がある。これは IV で触れられ、Calladine の報告がある。これは以前、Batdorf

に引継がれた Slip theory に基づくものである。現下の塑性力学の前提であり、本論文でも採用している潜在硬化化を認める所論に対して、Slip theory

これを認めないために持論がなされる。粉体内の無数の面が独立に硬化するという考えであるが、一見、異方性の考慮がすみやかになされるように思われる。しかし、金属

においては多くの議論の末、結晶相との干渉作用の無視という点に關する彼等自身の反論論文 (1956) が示される。全く、挫折した。従って、Calladine は Lewis &

Burland 等の主張に、塑性体積増分方向の能力増分方向への依存性を考慮せず、Slip theory を採用し、と断ぜられるが、彼の所論によれば、Lewis 地の実測は

より、強く何れ依存性が表現されるようである。これは Slip theory が常に負荷面に鋭利な Corner を形成することによると思われる。筆者の私見として I (2)

に述べたように潜在硬化化は、異方性から従って (右側から) Corner の発達を考慮してゆくのが妥当なように思われる。

謝辞 本論文に關しては山口柏樹先生より懇篤な御指導を賜った。ここに、深く謝意を表わしたい。

* $\beta > 0.75$ では C.S. Surface は凹面となるが、見値が伸張状態に近づくと、 β が大きくなるので負荷面の凸面性は消滅する。

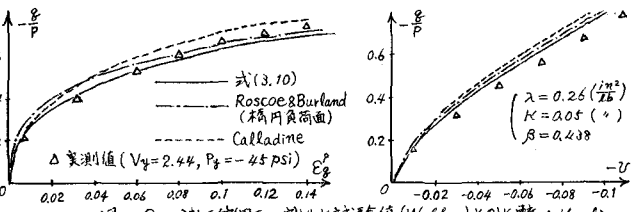


図-2 3軸圧縮(伸張)一排水試験値(Walker)との比較: Kaolin

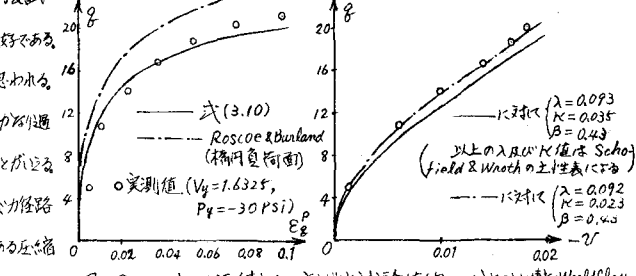


図-3 3軸伸張(伸張)一排水試験値(Parry)との比較: Kaolin

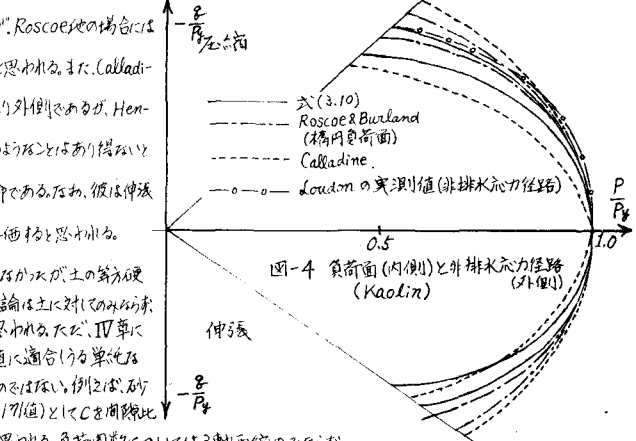


図-4 負荷面(内側)と非排水能力経路(外側) (Kaolin)