

九州大学 正員 上田 年比古

〃 〃 神野 健二

和泉 正史

森下 保寿

1. 序

地下密度流に対して分散方程式を適用しようとするれば、移送の流速は密度の場所的变化のために、もはや一様ではなく、したがって海水の侵入にともなう圧力場の時間的变化をも考慮して解かなければならない。このための流れの場を記述する方程式と塩分の分散を記述する方程式を連立して解かなければならないが解析的には不可能であり、数値計算によらざるをえない。本報告では、楕円型微分方程式および放物型微分方程式に対しての差分解に大きい収束率と安定性をもつ A.D.I 法 (Alternating Direction Implicit Method) を圧力場の方程式に適用し圧力分布と流速分布 (Darcy の法則より) とを求め、分散方程式には差分化の際の打ち切り誤差の伝播を防ぎかつその結果精度の良い濃度分布を計算できる特性曲線を用いた。これらの計算方法によれば分散現象としてとらえた地下密度流の非定常問題が数値計算でき、¹⁾ 実際問題としては河口湖の水位変動による海水の侵入の問題にも適用可能であると思われる。

2. 基礎式

いわゆる分散現象とは浸透層内の幾何学的構造により流体粒子が移動分散することといい、分子拡散は空けき内の流速がきわめて緩慢な時にものみ考慮される。また流速や浸透層の材質により、縦横の分散係数は変化するが、本計算では一定値を用いた。断面平均流速 $\vec{q} = \vec{q}(x, y, t)$, 圧力 $p = p(x, y, t)$, 密度の分布 $\rho = \rho(x, y, t)$, 濃度分布 $C(x, y, t)$, 移動粒子のもつ濃度 $C(R, t)$ (R は粒子番号), 淡水の粘性係数 μ , 透水係数 K (L の次元), 空けき率 n , 時間ステップ数 k , 反復計算のステップ数 m , 格子長は $(\Delta x, \Delta y)$ とする。

① 連続の式 ② Darcy の法則 ③ 分散方程式

$$\nabla \cdot \vec{q} = 0 \quad \text{--- (1)} \quad \vec{q} = -\frac{K}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}) \quad \text{--- (2)} \quad \frac{dC(R, t)}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{q}{n} \nabla C = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad \text{--- (3)}$$

④ 密度と濃度は $\rho(x, y, t) = \rho_0 + (1-E) \cdot C(x, y, t)$, ρ_0 は淡水の密度, $E \approx 0.3$ --- (4)

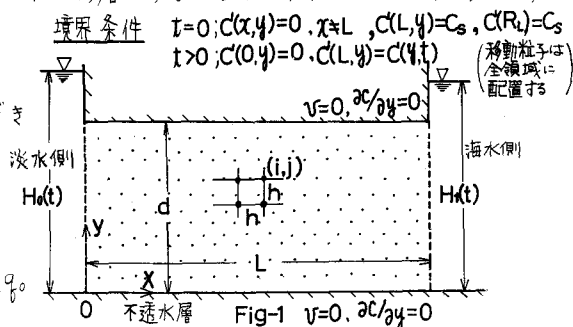
流れの領域や境界条件は図-1に示す。(2)式を(1)式に代入して粘性係数や透水係数は密度の変化に対して一定であるとし、また流れの領域も均一等方性の砂層よりなるものとするれば圧力の満たすべき基礎

式は $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + g \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$ --- (5)

また移動粒子 $(x(R, t), y(R, t))$ のもつ流速は空けき内の実質流速で

$$\frac{dx(R, t)}{dt} = \frac{q_x}{n}, \quad \frac{dy(R, t)}{dt} = \frac{q_y}{n} \quad \text{--- (6)}$$

(3), (5), (6) 式を代表長さ L (浸透層の長さ), 代表流速 q_0 , 代表時間 T (たとえば淡水側水位の一年周期),



C_s を海水濃度(3.6%)として無次元化すれば、*印を無次元量として

$$\frac{\partial^2 p_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 p_*}{\partial y_*^2} + \frac{g}{g_0} \frac{\partial}{\partial y_*} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) = 0 \quad (7), \quad \frac{dC_s}{dt_*} = \frac{\partial C_s}{\partial t_*} + \frac{T g_0}{L} \left(u_* \frac{\partial C_s}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial C_s}{\partial y_*} \right) = \frac{T}{L^2} \left(D_x \frac{\partial^2 C_s}{\partial x_*^2} + D_y \frac{\partial^2 C_s}{\partial y_*^2} \right) \quad (8)$$

また (6) 式は $\frac{dX_s(R, t_*)}{dt_*} = -\frac{T}{L^2} \frac{K g_0}{n \mu} \frac{\partial p_*}{\partial x_*}, \quad \frac{dY_s(R, t_*)}{dt_*} = -\frac{T}{L^2} \frac{K g_0}{n \mu} \frac{\partial p_*}{\partial y_*} - \frac{T}{L^2} \frac{K g_0}{n \mu} \rho \quad (9)$

3. 基礎式の差分化

A.D.I法により (7) 式を差分化し、反復計算ごとに緩和係数 W_m を変えて最も大きい収束率をうるようにする。x 方向, y 方向の連立方程式として

$$\begin{cases} p_{i+1, j, m+1/2} + \frac{1-2W_m}{W_m} p_{i, j, m+1/2} + p_{i-1, j, m+1/2} = \frac{p_{i, j, m}}{W_m} + \alpha_{i, j} & (10) \\ p_{i, j+1, m+1} + \frac{1-2W_m}{W_m} p_{i, j, m+1} + p_{i, j-1, m+1} = \frac{p_{i, j, m+1/2}}{W_m} + \beta_{i, j} & (11) \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, j_{max})$$

また

$$\alpha_{i, j} = -\left\{ p_{i+1, j, m} - 2p_{i, j, m} + p_{i-1, j, m} \right\} - \frac{g}{2\rho_0 g_0} (p_{i+1, j} - p_{i-1, j}), \quad \beta_{i, j} = -\left\{ p_{i, j+1, m+1/2} - 2p_{i, j, m+1/2} + p_{i, j-1, m+1/2} \right\} - \frac{g}{2\rho_0 g_0} (p_{i, j+1} - p_{i, j-1}) \quad (12)$$

このような反復過程を用いれば反復の過程で発生する打ち切り誤差ベクトル $[E_m]$ は, $[E_{m+1}] = 0.44[E_m]$ の関係で減衰してゆくことがわかっている²⁾。最適な緩和係数や A.D.I法の詳細な議論は文献2), 文献3) あるいは文献4)に譲る。(10), (11) 式のいわゆる三項方程式は漸化式に書き変えることができ計算を簡略はできる。たとえば (10) 式は 次のような漸化式になる。

$$p_{i, j, m+1/2} = \Gamma_i \cdot p_{i+1, j, m+1/2} + W_i, \quad \Gamma_i = 0, \quad \Gamma_i = \frac{1}{(1-2W_m)/W_m - \Gamma_{i-1}}, \quad W_i = p_{i, j, m+1/2}, \quad W_i = \frac{p_{i, j, m+1/2}/W_m + \alpha_{i, j} - W_{i-1}}{(1-2W_m)/W_m + \Gamma_{i-1}} \quad (13)$$

次に、移動粒子のもつ流速は格子点 (i, j) の占める領域内にあるときは (i, j) 点の流速に等しいものとする。もし粒子が $x_i - \frac{1}{2}h \leq x(R, t_*) < x_i + \frac{1}{2}h; y_j - \frac{1}{2}h \leq y(R, t_*) < y_j + \frac{1}{2}h$ (14)

のときには (i, j) 点の領域内にあるとし, $\Delta t_{k+1/2}$ 時間後には

$$x(R, t_* + \Delta t_{k+1/2}) = x(R, t_*) + \Delta t_{k+1/2} \cdot \frac{T}{L} g_0 \cdot u_*(i, j); \quad y(R, t_* + \Delta t_{k+1/2}) = y(R, t_*) + \Delta t_{k+1/2} \cdot \frac{T}{L} g_0 \cdot v_*(i, j) \quad (15)$$

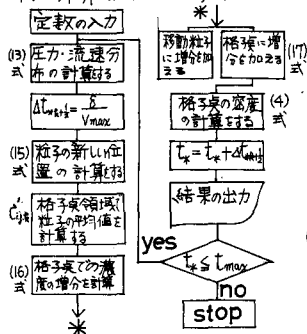
に移動する。ここで $\Delta t_{k+1/2}$ の決め方であるが、最も大きな流速をもつ粒子が $\Delta t_{k+1/2}$ 時間に δ だけ移動するように予め δ を与えておけばよい。すなわち $\Delta t_{k+1/2} = \delta / v_{max}$ 。次に格子点の濃度は、その領域の中に含まれている数個の粒子のもつ濃度の平均値に等しいとする。(8) 式を差分化すれば、

$$\Delta C(R, t_* + \Delta t_{k+1/2}) = \Delta C(i, j, t_* + \Delta t_{k+1/2}) = \Delta t_{k+1/2} \cdot \frac{T}{L^2} \left\{ D_x (C'_{i+1, j, k} - 2C'_{i, j, k} + C'_{i-1, j, k}) + D_y (C'_{i, j+1, k} - 2C'_{i, j, k} + C'_{i, j-1, k}) \right\} \quad (16), \quad C'_{i, j, k} \text{ は平均値}$$

この増分を (i, j) 点の領域内の全ての粒子および (i, j) 点の濃度に加える。

$$C(R)_{k+1} = C(R)_k + \Delta C(R, t_* + \Delta t_{k+1/2}); \quad C_{i, j, k+1} = C'_{i, j, k} + \Delta C(i, j, t_* + \Delta t_{k+1/2}) \quad (17)$$

4. 計算のフローチャート



移動粒子は各格子点の占める領域につき4個配置し $t_*=0$ の時には $x_*=1.0$

以外の移動粒子の濃度は0とする。移動粒子が動いた際流線の領域の外に出たときには常に海水側に戻すようにしておき、その時の粒子の濃度は $x_*=1.0$ 上の濃度分布にしたがって決定する。また $x_*=1.0$ 上では密度分布を生じることが圧力は静水圧分布を仮定する。

- (参考文献) 1) "A Numerical Technique for Calculating the Transient Position of the Saltwater Front", George F. Pinder, Hilton H. Cooper, JR; Water Resources Research Vol. 6 No. 3, 1970, June, 1915
2) "The Numerical solution of parabolic and elliptic differential equations", D.W. Peaceman, H.H. Rachford; J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 3, 1955, 41
3) 数値計算; 赤坂隆孝, コロナ社, P. 111
4) 偏微分方程式の差分法による近似解法, 藤野精一, 読者 吉岡書店, P. 331