

1. 概説

海中に存在する構造物或は海底の形状によって、波がどのように変形するかと云った問題は従来から理論的にも実験的にも多くなされている。

無限水深と仮定した時の垂直版による問題と取扱った Dean (1945) や波のエネルギー収支の関係から潜堤の問題と取扱った Fuks (1951) および step 形状に対する Miles (1967) の研究やその他 Mei-Black (1969), Newman (1965) など多くの研究がなされている。

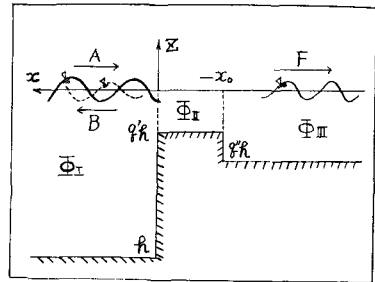


Fig. 1. Typical type of the reef round Okinawa Islands.

沖縄海岸の地質は隆起さんご礁の部分が多く、その大部分は図-1に示すような形状になっている。このような複雑な形状に対する波の変形について、理論的に取扱ったものは、見出せない。本論文は微小振幅ポテンシャル波動と仮定して解いたものであるが、この研究では上記文献の外、高野 (1960) や井島等及び日野等の類似の研究成果に買う所が大である。

なお、計算は最近琉球大学に設置された FACOM (230-15) と利用した。

2. 理論

2-1) 速度ポテンシャル

基本的には水面、海底における境界条件と満足するように Laplace の方程式と解き (こゝでは普通の水理学書に示めてある。) 水深によって区別して各々の領域 (図-1 参照) で隣接するポテンシャルが接続 (速度やエネルギー束) 出来る様にする。基本式と時間と空間の座標に分けて示めた場合、各領域の速度ポテンシャルは (1) 式で仮定出来る。

$$\Phi_j(x, z, t) = \phi_j(x, z) \cdot \exp(i\omega t) : (j = I, II, III) \quad (1)$$

境界条件と接続条件は (2) および (3) 式になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} &= \kappa^2 \frac{\Phi_j}{j} & \text{on } z=0 & : (j = I, II, III) \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} &= 0 & \text{on } z=-h, z=-h', z=-h'' & : (j = I, II, III) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} & \text{on } x=0, (0 > z > -h') \\ &= 0 & \text{on } x=0, (-h' > z > -h) \end{aligned} \right\} \quad (3-a)$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} \quad \text{on } x=0, (0 > z > -h') \quad (3-b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} & \text{on} & \quad x = -x_0, \quad (0 > z > -g'h) \\ &= 0 & \text{on} & \quad x = -x_0, \quad (-g'h > z > -g''h) \end{aligned} \right\} \quad (3-c)$$

$$\frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} \quad \text{on} \quad x = -x_0, \quad (0 > z > -g'h) \quad (3-d)$$

記号や文字で一般的に使用されているものの説明は省略する。(普通の水理学書に示してある)
(2)式と用いると(4)式(境界値問題における固有値と与える式)および(5)~(7)式と得る。

$$\left. \begin{aligned} \alpha h/g &= kh, \tanh(kh) = -knh \cdot \tan(knh) ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \alpha h g'/g &= k'h'g', \tanh(k'g'h) = -k'm'g'h \tan(k'm'g'h) ; \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ \alpha g''h/g &= k''g''h, \tanh(k''g''h) = -k''e'g''h \tan(k''e'g''h) ; \quad l = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\phi_1 = \left\{ A \cdot e^{ikx} + B e^{-ikx} \right\} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot C^{-knx} \frac{\cosh kn(h+z)}{\cosh knh} \quad (5)$$

$$\phi_2 = \left\{ C \frac{\cosh k'x}{\cosh k'x_0} + D \frac{\sinh k'x}{\sinh k'x_0} \right\} \frac{\cosh k'(g'h+z)}{\cosh k'g'h} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E_m \frac{\cosh k'mx}{\cosh k'mx_0} + H_m \frac{\sinh k'mx}{\sinh k'mx_0} \right\} \frac{\cosh k'm(g'h+z)}{\cosh k'mg'h} \quad (6)$$

$$\phi_3 = F \exp\{ik''(x+x_0)\} \frac{\cosh k''(g''h+z)}{\cosh k''(g''g'h)} + \sum_{l=1}^{\infty} G_l \cdot \exp\{k''e'(x+x_0)\} \frac{\cosh k''e'(g''h+z)}{\cosh k''e'g''h} \quad (7)$$

(5)~(7)式と(3)式に代入すると未知係数 $B, C, D, C_n, E_m, F, H_m, G_l$ が定まり、速度ポテンシャルは確定するわけである。勿論 A は入射波によって与えられる係数である。

2-2. 積分

(5)~(7)式と(3)式に代入するとき、(4)式の条件と、各領域の水深区間の直交関係と考慮する。
つまり、 $\cosh kh(h+z), \cosh kn(h+z)$ は $0 > z > -h$ 区間で $\cosh k'(g'h+z), \cosh k'm(g'h+z)$ は $0 > z > -g'h$ 区間で $\cosh k''(g''h+z), \cosh k''e(g''h+z)$ は $0 > z > -g''h$ 区間で各々直交関数となる。
従って、(3)式に対し次のような積分と実行する。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h}^0 (3-a) \cdot \cosh kh(h+z) dz ; \quad \int_{-h}^0 (3-a) \cdot \cosh kn(h+z) dz \\ \int_{-g'h}^0 (3-b) \cdot \cosh k'(g'h+z) dz ; \quad \int_{-g'h}^0 (3-b) \cdot \cosh k'm(g'h+z) dz \\ \int_{-g''h}^0 (3-c) \cdot \cosh k''(g''h+z) dz ; \quad \int_{-g''h}^0 (3-c) \cdot \cosh k''e(g''h+z) dz \\ \int_{-g''h}^0 (3-d) \cdot \cosh k''(g''h+z) dz ; \quad \int_{-g''h}^0 (3-d) \cdot \cosh k'm(g''h+z) dz \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. 係数に関する方程式.

(8)式の積分と実行すると次のようになる.

$$\left. \begin{aligned}
 A - B &= i \left\{ a_1 \cdot D + \sum_{m=1}^{\infty} H_m a_m \right\} \\
 C_n &= a_n \cdot D - \sum_{m=1}^{\infty} a_n \cdot m \cdot H_m \quad ; \quad (n = 1, 2, \dots) \\
 C &= -(A + B) b'_2 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n b_n \\
 E_m &= -(A + B) b_m + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot b_{mn} \quad ; \quad (m = 1, 2, \dots) \\
 F &= i \left\{ \left[D \frac{\cosh k' z_0}{\sinh k' z_0} + C \frac{\sinh k' z_0}{\cosh k' z_0} \right] d'_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E_m \frac{\sinh k_m z_0}{\cosh k_m z_0} - H_m \frac{\cosh k_m z_0}{\sinh k_m z_0} \right\} d_m \right\} \\
 G_\ell &= \left\{ D \frac{\cosh k' z_0}{\sinh k' z_0} + C \frac{\sinh k' z_0}{\cosh k' z_0} \right\} d_\ell - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ H_m \frac{\cosh k_m z_0}{\sinh k_m z_0} - E_m \frac{\sinh k_m z_0}{\cosh k_m z_0} \right\} d_{\ell m} \quad ; \quad (\ell = 1, 2, \dots) \\
 C &= D - F b'_3 - \sum_{\ell=1}^{\infty} G_\ell b_\ell \\
 E_m &= H_m - F b_{m3} + \sum_{\ell=1}^{\infty} G_\ell \cdot b_{m\ell} \quad ; \quad (m = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 a'_1 &= \frac{4 \cosh k h \cdot \sinh k h (1 - \beta')}{\cosh k' \beta' h \cdot (2 k h + \sinh 2 k h) \cdot \sinh k' z_0} \cdot \frac{k \cdot k'}{(k)^2 - (k')^2} \\
 a_m &= \frac{4 \cosh k h \cdot \sinh k h (1 - \beta')}{\cosh k_m \beta' h \cdot (2 k h + \sinh 2 k h) \cdot \sinh k_m z_0} \cdot \frac{k \cdot k_m}{(k)^2 + (k_m)^2} \\
 a_n &= \frac{4 \cosh k h \cdot \sinh k h (1 - \beta')}{\cosh k' \beta' h \cdot (2 k h + \sinh 2 k h) \cdot \sinh k' z_0} \cdot \frac{k' \cdot k_n}{(k')^2 + (k_n)^2} \\
 a_{mn} &= \frac{4 \cosh k h \cdot \sinh k h (1 - \beta')}{\cosh k'_m \beta' h \cdot (2 k h + \sinh 2 k h) \cdot \sinh k'_m z_0} \cdot \frac{k_n \cdot k'_m}{(k'_m)^2 - (k_n)^2} \\
 b'_2 &= \frac{4 \cosh k' \beta' h \cdot \sinh k h (1 - \beta') \cdot \cosh k' z_0}{\cosh k h \cdot (2 k' \beta' h + \sinh 2 k' \beta' h)} \cdot \frac{k \cdot k'}{(k)^2 - (k')^2} \\
 b_n &= \frac{4 \cosh k' \beta' h \cdot \sinh k_n h (1 - \beta') \cdot \cosh k' z_0}{\cosh k_n h \cdot (2 k' \beta' h + \sinh 2 k' \beta' h)} \cdot \frac{k_n \cdot k'}{(k_n)^2 + (k')^2} \\
 b_m &= \frac{4 \cosh k'_m \beta' h \cdot \sinh k h (1 - \beta') \cdot \cosh k'_m z_0}{\cosh k h \cdot (2 k'_m \beta' h + \sinh 2 k'_m \beta' h)} \cdot \frac{k \cdot k'_m}{(k')^2 + (k'_m)^2} \\
 b_{mn} &= \frac{4 \cosh k'_m \beta' h \cdot \sinh k_n h (1 - \beta') \cdot \cosh k'_m z_0}{\cosh k_n h \cdot (2 k'_m \beta' h + \sinh 2 k'_m \beta' h)} \cdot \frac{k_n \cdot k'_m}{(k'_m)^2 - (k_n)^2} \\
 d'_1 &= \frac{4 \cosh k' \beta' h \cdot \sinh k' h (\beta'' - \beta')}{\cosh k' \beta' h \cdot (2 k' \beta'' h + \sinh 2 k' \beta'' h)} \cdot \frac{(k')^2}{(k')^2 - (k')^2}
 \end{aligned}$$

$$d_m = \frac{4 \cos k' g'' h \cdot \sinh k_m h (g'' - g')}{\cos k_m g'' h (2 k' g'' h + \sinh 2 k' g'' h)} \cdot \frac{(k'_m)^2}{(k')^2 + (k'_m)^2}$$

$$d_e = \frac{4 \cos k_e g'' h \cdot \sinh k' h (g'' - g')}{\cos k' g'' h (2 k_e g'' h + \sinh 2 k_e g'' h)} \cdot \frac{(k')^2}{(k')^2 + (k_e')^2}$$

$$d_{em} = \frac{4 \cos k_e g'' h \cdot \sinh k_m h (g'' - g')}{\cos k_m g'' h (2 k_e g'' h + \sinh 2 k_e g'' h)} \cdot \frac{(k'_m)^2}{(k_e')^2 + (k'_m)^2}$$

$$b'_3 = \frac{4 \cosh k' g' h \cdot \sinh k'' h (g'' - g')}{\cosh k' g'' h (2 k' g' h + \sinh 2 k' g' h)} \cdot \frac{k' \cdot k''}{(k')^2 - (k'')^2}$$

$$b_e = \frac{4 \cosh k' g' h \cdot \sinh k_e h (g'' - g')}{\cos k_e g'' h (2 k' g' h + \sinh 2 k' g' h)} \cdot \frac{k' k_e}{(k')^2 + (k_e')^2}$$

$$b_{mn} = \frac{4 \cos k'_m g' h \cdot \sinh k'' h (g'' - g')}{\cosh k' g'' h (2 k'_m g' h + \sinh 2 k'_m g' h)} \cdot \frac{k'' k_m}{(k')^2 + (k'_m)^2}$$

$$b_{me} = \frac{4 \cos k'_m g' h \cdot \sinh k_e h (g'' - g')}{\cos k_m g'' h (2 k'_m g' h + \sinh 2 k'_m g' h)} \cdot \frac{k_e k_m}{(k'_m)^2 - (k_e')^2}$$

4. 反射率と透過率

(9)式は $(2m + n + l + 4)$ 箇の連立1次方程式である。故に原理的には解ける。(B, C, D……などの未知係数が決定する)。その解(係数の値)を用いて反射率と透過率は(10)式で計算出来る。

$$\text{反射率 } K_r = \left| \frac{B}{A} \right| \quad ; \quad K_t = \left| \frac{F}{A} \right| \quad (10)$$

5. 計算結果と考察

m, n, l の箇数と如何にするかは問題である。例えば、各々1箇まで採用すると8連の代数方程式と解くことになるが、各々2箇まで採用すると12連の代数方程式と解くことになり、同様にして、 n 個ずつ採用すると、 $4(n+1)$ 連の方程式になる。結果的にはこれが計算精度に関係する。

計算値に対する精度の問題については、今後検討することにして、本文では8連の1次方程式と解き、反射率と透過率の計算と行なった。計算結果の1例を図-2示した。

図からわかることは、 $|K_r| + |K_t| = 1$ なる関係は成立しないことである。このことは反射率、透過率と、波高によって定義したからであり、もしエネルギー的に定義するなら、エネルギー保存則は成立するものと考ええる。

Fig. 2
Reflexion and Transmission
coefficients (K_r and K_t) of
water waves, passing
over the reef.

