

九州大学 工学部 正 員 椿 東一郎

" 大学院 学生員 小松 利光

" " " 井沢 一

まえがき

周囲流体より軽い流体を上向きに連続的に噴出させる、いわゆる *forced plume* においては *homogeneous jet* と同様に周囲の静止流体からの巻き込み(連行現象)が最も重要な役割をもっている。従来、*plume* の場合には実験的に定められる連行係数 E を便宜的に連続の式に導入して解析している。前報において密度差を伴う水平密度噴流について E を理論的に求め、いわゆる *Ellison & Turner* の関係と導いた。ここではこの手法を鉛直噴流に拡張して、若干の考察を行う。

基礎式

(i) 図に示したような二次元の場合と考え、中心流速、中心密度を U_x, ρ_x とする。噴流内では各断面において、流速及び密度分布の相似性が成立するものとして、次式を用いる。 $U = U_x f(\eta) \dots (1)$ $\rho = \rho_w - (\rho_w - \rho_x) m(\eta) \dots (2)$ $\eta = \frac{y}{B}$
今、連続の式を 0 から y まで積分することにより次式が得られる。

$$v = -\alpha'(\eta) \cdot E \cdot U_x \dots (3) \quad \alpha'(\eta) = \int_0^\eta f(\eta) d\eta$$

(ii) 及び(3)式を y 方向の運動方程式に代入し、 y から B まで積分すると、圧力 P は

$$P = P_w - \rho_w \left\{ r'(\eta) \frac{d}{dx} (E B U_x^2) - E^2 U_x^2 \{ \alpha_1^2 - \alpha^2(\eta) \} \right\} \dots (4) \quad \alpha_1 = \int_0^1 f(\eta) d\eta,$$

$$r'(\eta) = \int_\eta^1 f(\eta) \int_0^\eta f(\eta) d\eta d\eta, \quad P_w: y > B \text{ の領域における圧力}$$

(4)式を用いると、 x 方向の運動方程式及び平均流のエネルギー方程式は次のように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial x} U^2 + \frac{\partial}{\partial y} Uv = -\frac{g}{\rho} (\rho - \rho_w) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial y} + \left\{ r'(\eta) \frac{d^2}{dx^2} (E B U_x^2) - \{ \alpha_1^2 - \alpha^2(\eta) \} \frac{d}{dx} (E^2 U_x^2) \right\} \dots (5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{ U(u^2 + v^2) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \{ v(u^2 + v^2) \} = U \cdot \frac{P_w - P}{\rho_w} \cdot g + \frac{U}{\rho} \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha^2(\eta) f(\eta) \cdot E U_x \frac{d}{dx} [E U_x^2] - 2\alpha^2(\eta) f(\eta) \cdot \frac{E^3 U_x^3}{B} \\ + r'(\eta) \cdot f(\eta) U_x \frac{d^2}{dx^2} (E B U_x^2) - \{ \alpha_1^2 - \alpha^2(\eta) \} \cdot f(\eta) \cdot U_x \frac{d}{dx} (E^2 U_x^2) \dots (6)$$

基礎式は連続の式、拡散方程式、そして上記の x 方向運動方程式、平均流のエネルギー方程式で、

噴流断面に関して積分すると、 $\frac{U}{\rho} = K_E \frac{dU}{dy} = \frac{1}{3} B_0 C \cdot l \frac{dU}{dy}$ とし、

$$\frac{d}{dx} [B U_x] = E U_x \dots (7) \quad \alpha_2 = \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad \alpha_3 = \int_0^1 f^2(\eta) d\eta, \quad \alpha_4 = \int_0^1 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta, \quad \alpha_5 = \int_0^1 f(\eta) \cdot \frac{df}{d\eta} d\eta$$

$$\frac{d}{dx} [E_s B \cdot U_x] = 0 \dots (8) \quad \beta_1 = \int_0^1 m(\eta) d\eta, \quad \beta_2 = \int_0^1 f(\eta) m(\eta) d\eta, \quad \delta_1 = \int_0^1 r'(\eta) d\eta$$

$$\alpha_2 \frac{d}{dx} [B U_x^2] = \beta_1 g E_s B + \delta_1 B \frac{d^2}{dx^2} (E B U_x^2) - \delta_2 \cdot B \frac{d}{dx} (E^2 U_x^2) \dots (9) \quad \delta_2 = \int_0^1 \{ \alpha_1^2 - \alpha^2(\eta) \} d\eta$$

$$\frac{1}{2} \alpha_3 \frac{d}{dx} [B U_x^3] = \beta_2 g E_s B U_x - \alpha_4 K_E \frac{U_x^3}{B} + \delta_3 E B U_x \frac{d}{dx} (E U_x^2) - 2\delta_5 E^3 U_x^3 + \delta_6 \cdot B \cdot U_x \frac{d^2}{dx^2} (E B U_x^2) - \delta_7 B U_x \frac{d}{dx} (E U_x^2) \dots (10)$$

$$\delta_3 = \int_0^1 \alpha^2(\eta) \cdot f(\eta) d\eta, \quad \delta_6 = \int_0^1 f(\eta) \cdot r'(\eta) d\eta, \quad \delta_7 = \int_0^1 \{ \alpha_1^2 - \alpha^2(\eta) \} \cdot f(\eta) d\eta$$

次に乱れエネルギー $C^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2$ 及び Reynolds 応力 $\bar{u} \bar{v}$ の輸送方程式において、拡散係数 $K_F = \alpha_4 \frac{1}{3} C \cdot l$ とし、 C^2 の dissipation $= -\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} C^2$ ($\delta_8 = 10.0$), $\bar{u} \bar{v}$ の dissipation $= -\frac{K_F U}{\lambda^2} \bar{u} \bar{v}$ ($K_8 = 40.0$) とすると、乱れエネルギーの方程式及び Reynolds 応力の輸送方程式の噴流断面に関しての積分は次のようになる。

$$\alpha_1 \frac{d}{dx} [B U_x C^2] = \frac{2}{3} \alpha_0 \beta_* C \ell \frac{U_x^2}{B} - \frac{2}{3} \beta_1 \alpha_* \beta_* q C \ell \frac{d}{dx} [E_* B] - \frac{S_* V}{\lambda^2} C^2 B \quad \dots (11)$$

$$\alpha_5 \frac{d}{dx} [C \cdot \ell \cdot U_x^2] = -3 \frac{K_*}{\beta_*} C^2 U_x - \alpha_* q \cdot C \cdot \ell \cdot E_* + \frac{V_* V}{\lambda^2} C \cdot \ell \cdot U_x \quad \dots (12) \quad \lambda: \text{Taylor's micro scale}$$

$q' = C/U_x$ $\ell = \beta_0 \cdot B$ とし、(7)、(9)の関係を用いて、(10)式の左辺が連行係数Eを含む形に変形すると、

若干の計算の後 Eを規定する式として ここで $1/F_*^2 = \frac{E_* q B}{U_x^2} = \frac{\alpha_1^2 R_i}{\beta_1}$... (13)

$$2 S_5 E^2 - \frac{1}{2} \alpha_3 E = (\beta_2 - \frac{\alpha_3 \beta_1}{\alpha_2}) \frac{1}{F_*^2} + (\delta_6 - \frac{\alpha_3 \delta_1}{\alpha_2}) \chi_1(\frac{1}{F_*}, E) + (\frac{\alpha_3 \delta_2}{\alpha_2} - \delta_7) \chi_2(\frac{1}{F_*}, E) + \delta_5 E \chi_3(\frac{1}{F_*}, E) - \frac{\alpha_4}{3} \beta_* \beta_0 q' \quad \dots (14)$$

$$\chi_0(\frac{1}{F_*}, E) = \frac{\beta_1}{\alpha_2} \frac{1}{F_*^2} - E, \quad \chi_2(\frac{1}{F_*}, E) = -6 \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_2^2} \cdot E \cdot \frac{1}{F_*^2} \cdot \chi_0(\frac{1}{F_*}, E) \cdot \frac{dE}{dR_i} + 2 E^2 \cdot \chi_0(\frac{1}{F_*}, E)$$

$$\chi_1(\frac{1}{F_*}, E) = -6 \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2 \alpha_2} (\frac{1}{F_*})^2 \cdot \chi_0(\frac{1}{F_*}, E) \cdot \frac{dE}{dR_i} - \frac{\beta_1}{\alpha_2} E \cdot \frac{1}{F_*^2} \cdot \chi_0(\frac{1}{F_*}, E) + 9 \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^4} (\frac{1}{F_*})^2 \chi_0^2(\frac{1}{F_*}, E) \frac{d^2 E}{dR_i^2}$$

$$+ 3 \frac{\beta_1}{\alpha_1^2} [2 \frac{\beta_1}{\alpha_2} (\frac{1}{F_*})^2 - \frac{1}{F_*^2} \cdot E] \cdot \chi_0(\frac{1}{F_*}, E) \frac{dE}{dR_i} + 9 \frac{\beta_1}{\alpha_1^2} (\frac{1}{F_*})^2 \chi_0(\frac{1}{F_*}, E) (\frac{\beta_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_1^2} \frac{dE}{dR_i}) \frac{dE}{dR_i}$$

$$\chi_3(\frac{1}{F_*}, E) = \chi_0(\frac{1}{F_*}, E) \cdot (-3 \frac{\beta_1}{\alpha_1^2} \frac{1}{F_*^2} \frac{dE}{dR_i} + 2 E)$$

が得られる。

また(12)式を用いて(11)式から Taylor's micro scale λ を消去した後、(7)(8)(9)(10)の関係式を用いて(11)式を q' について整理すると、

$$\frac{3 K_* S_*}{\beta_0 \beta_* F_*} q'^2 + \left\{ \alpha_1 + \frac{\alpha_5 S_*}{F_*} \right\} \chi_4(E, \frac{1}{F_*}) + \frac{\alpha_5 S_*}{F_*} \cdot \frac{1}{F_*^2} \left\{ q' + \frac{2}{3} \beta_1 \alpha_* \beta_* \beta_0 \chi_5(\frac{1}{F_*}, E) - \frac{2}{3} \alpha_4 \beta_* \beta_0 \right\} = 0 \quad \dots (15)$$

$$\chi_4(\frac{1}{F_*}, E) = 2 \frac{\beta_1}{\alpha_2} \frac{1}{F_*^2} - E + 2 \frac{\delta_1}{\alpha_2} \chi_1(\frac{1}{F_*}, E) - 2 \frac{\delta_2}{\alpha_2} \chi_2(\frac{1}{F_*}, E)$$

$$\chi_5(\frac{1}{F_*}, E) = -\frac{\beta_1}{\alpha_2} (\frac{1}{F_*})^2 + \frac{1}{F_*^2} \cdot E - \frac{\delta_1}{\alpha_2} \frac{1}{F_*^2} \chi_1(\frac{1}{F_*}, E) + \frac{\delta_2}{\alpha_2} \frac{1}{F_*^2} \chi_2(\frac{1}{F_*}, E)$$

(14)式、(15)式から連行係数Eは、流速分布 f 、密度分布 m による係数を含みながら $1/F_*^2 = \alpha_1^2 / \beta_1 \cdot R_i$ に規定されていることがわかる。(14)(15)で $1/F_*^2 \rightarrow 0$ の場合が *homogeneous two dimensional jet* に相当するが、この場合の連行係数は $E_0 = 0.075$ 程度である。流速分布 $f(\eta)$ 、密度欠損分布 $m(\eta)$ は軸対称の *plume* と同様 Gauss 分布をとるものと思われるが、後の計算を容易にする為、Gauss 分布に似せた次の函数形 $f(\eta) = m(\eta) = 1.54\eta^3 - 2.48\eta^2 - 0.06\eta + 1$ で表わすことにする。なおこの分布形は、我々が実験で測定した密度欠損分布 (ii) 図と良い一致を示している。従って諸係数は $\alpha_1 = \beta_1 = 0.528$ $\alpha_2 = \beta_2 = 0.392$, $\alpha_3 = 0.321$, $\alpha_4 = 1.129$, $\alpha_5 = -0.499$, $\delta_1 = 0.063$, $\delta_2 = 0.125$, $\delta_5 = 0.069$, $\delta_6 = 0.069$, $\delta_7 = 0.097$ で与えられる。式(14)(15)で $E_0 = 0.075$ として β_* を逆算すると $\beta_* = 0.133$ となり、妥当な値と思われる。次に式(14)(15)を用いて、Eと $R_i = \beta_1 / \alpha_1^2 \cdot 1/F_*^2$ の関数として計算を行なった。計算は第一近似解として(14)式の右辺における dE/dR_i を近似的に $dE/dR_i = 0$ としてEを計算し、その計算結果から、新たに求めた dE/dR_i を用いて第二近似解を

η を求める。同様の手法で順次近似解を求めて、近似度を高くしていく。計算結果は (iii) 図に示す。 R_i の増加とともにEを増加する傾向が認められる。なお助力願った岩下、木寺両君に、感謝の意を表します。

