2ヒンジアーチ橋の弾塑性振動解析

宮崎大学工学部　正　員　太田俊昭
九州大学工学部　正　員　村田重之
宮崎大学工学部　学生員　○右近大道
〃　〃　竹内勝行
〃　〃　星野茂

I　諸言

著者らは先に，はりの動的弾塑性曲げ応答に関する一般理論を提示[1]し，直線ばりに対しては解析結果を併せ報告した。続いて本論では，同理論が2ヒンジアーチの応答解析にもそのまま適用できることを証明する為，基礎理論の展開と実際の数値解析手法の略説を試みるものとする。

II　基本方程式の誘導

半径R，中心角2θの2ヒンジアーチABのモーメント式は一般に

$$\mathbb{M} = H_B \mathbb{h} + \alpha_g \mathbb{g} + \mathbb{a}^u \mathbb{P}^y + \mathbb{a}^v \mathbb{P}^x \quad \text{-----(1)}$$

ここに，$H_B \mathbb{h}$：水平反力H_Bによるモーメント，$\alpha_g \mathbb{g}$：荷重$\mathbb{g}$によるモーメント

$\mathbb{a}^u \mathbb{P}^y$, $\mathbb{a}^v \mathbb{P}^x$：慣性力の垂直，水平方向の成分$\mathbb{P}^y$, $\mathbb{P}^x$によるモーメント

式(1)を降伏モーメントM_yで無次元化して

$$\overline{\mathbb{M}} = \overline{H}_B \overline{\mathbb{h}} + \overline{g}_0 K \overline{\alpha}_g \overline{\mathbb{g}} + K \overline{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{P}} \quad \text{-----(2)}$$

ここに $\overline{H}_B = {}^{RH_B}/_{M_y}$，$\mathbb{h} = R\overline{\mathbb{h}}$，$\overline{\mathbb{C}} = (\mathbb{a}^u, \mathbb{a}^v)/R^2$，$\overline{\alpha}_g = {}^{\alpha_g}/_{R}$，$\overline{\mathbb{g}} = {}^{\mathbb{g}}/_{g_0}$

g_0：荷重強度 $\overline{g}_0 = {}^{g_0}/_{m_0\alpha_s}$，$K = {}^{m_0\alpha_s R^2}/_{M_y}$，$\overline{\mathbb{P}} = \binom{\mathbb{P}^y}{\mathbb{P}^x}/_{m_0\alpha_s}$，$m_0$：質量，$\alpha_s$：基準加速度

任意点rのたわみδ_rと曲率ϕの関係はϕ-法公式[2]より次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \delta_r^y &= a_r \theta_A - \int_A^r \phi (a_r - x) ds \\ \delta_r^x &= h_r \theta_A - \int_A^r \phi (h_r - y) ds \\ \theta_A &= \int_A^B \phi \frac{l - x}{l} ds \end{aligned}\right\} \quad \text{-----(3)}$$

ここに $\phi = \phi^e + \phi^p = \phi_y(\overline{\phi}^e + \overline{\phi}^p) = \frac{M_y}{EI}(\overline{M} + \overline{\phi}^p)$ -----(4)

式(3),(4)より $\mathbb{S} = \mathbb{a}\,\boldsymbol{\phi} = \frac{R^2 M_y}{EI}\binom{\overline{\mathbb{a}}^u}{\overline{\mathbb{a}}^v}(\overline{\mathbb{M}} + \overline{\boldsymbol{\phi}}^p)$ -----(5)

さて，支点Bにおける水平変位は，$\delta_B^x = 0$であるから，式(2),(5)より

$$\overline{H}_B = -\frac{1}{A_0}(\overline{g}_0 K \overline{\mathbb{a}}_0 \overline{\alpha}_g \overline{\mathbb{g}} + K \overline{\mathbb{a}}_0 \overline{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{a}}_0 \overline{\boldsymbol{\phi}}^p), \quad A_0 = \overline{\mathbb{a}}_0 \overline{\mathbb{h}} \quad \text{-----(6)}$$

よって $\overline{\mathbb{M}} = \overline{g}_0 K \mathbb{J} \overline{\alpha}_g \overline{\mathbb{g}} + K \mathbb{J} \overline{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{P}} - \frac{\overline{\mathbb{h}}}{A_0} \overline{\mathbb{a}}_0 \overline{\boldsymbol{\phi}}^p$ -----(7)

ここに $\mathbb{J} = \mathbb{I} - \frac{1}{A_0}\overline{\mathbb{h}}\,\overline{\mathbb{a}}_0$，　$\mathbb{I}$：単位行列

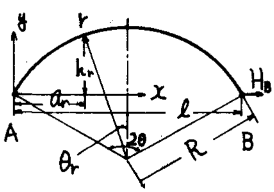
式(5),(7)に $\overline{\mathbb{P}} = -\overline{\mathbb{m}}\ddot{\mathbb{S}}$ なる関係を導入すれば弾塑性振動方程式が次の様に求められる。

$$\frac{EI}{R^2 M_y}\mathbb{S} = -K \overline{\mathbb{a}} \mathbb{J} \overline{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{m}} \ddot{\mathbb{S}} + \overline{g}_0 K \overline{\mathbb{a}} \mathbb{J} \overline{\alpha}_g \overline{\mathbb{g}} + \overline{\mathbb{a}} \mathbb{J} \overline{\boldsymbol{\phi}}^p \quad \text{-----(8)}$$

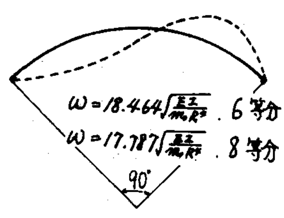
III　弾性自由振動

弾性自由振動の場合は（$\overline{\mathbb{g}} = 0$, $\overline{\boldsymbol{\phi}}^p = 0$）式(8)より

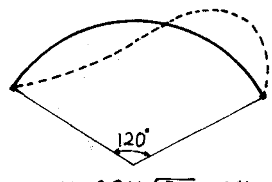
$$\frac{EI}{R^2 M_y}\mathbb{S} = -K \overline{\mathbb{a}} \mathbb{J} \overline{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{m}} \ddot{\mathbb{S}}/\alpha_s \quad \text{-----(9)}$$



図－1



(a)



(b)

図－2

円振動数をωとすれば　$\ddot{\boldsymbol{\delta}} = -\omega^2 y = -\omega^2 \boldsymbol{\delta}$ ------------------------------(10)

式(9),(10)より　$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\delta} = \mathbb{K}\boldsymbol{\delta}$ ------------------------------(11)

ここに　$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\alpha_s EI}{K M_y R^3 \omega^2} = \frac{EI}{\omega^2 m_0 R^4}$,　$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\mathbb{C}}\,\overline{\mathbb{m}}$

中心角90°, 120°, 等断面アーチを6, 8等分した場合についてマトリックス反復法を用いて1次モードを求めた。(図-2 (a), (b))

Ⅳ　弾塑性強制振動

$q^y = -q_0 \sin \omega t$ なる等分布強制力が垂直方向に働く場合について考察する。

まず式(8)を静的たわみδ_sで無次元化すれば

$$\overline{\boldsymbol{\delta}} = -K K' \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\mathbb{C}}\,\overline{\mathbb{m}}\,\ddot{\overline{\boldsymbol{\delta}}} + K K' \overline{q}_0 \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}{}_q^y\,\overline{\boldsymbol{q}}{}^y + K' \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\boldsymbol{\phi}}{}^p , \quad K' = \frac{R^2 M_y}{EI\delta_s} \quad \text{------(12)}$$

ここで時刻$i+1$のとき成立する式(12)を添字$i+1$を用いて表わせば

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}_{i+1} = -K K' \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\mathbb{C}}\,\overline{\mathbb{m}}\,\ddot{\overline{\boldsymbol{\delta}}}_{i+1} + K K' \overline{q}_0 \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}{}_q^y\,\overline{\boldsymbol{q}}{}^y_{i+1} + K' \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\boldsymbol{\phi}}{}^p_{i+1} \quad \text{------(13)}$$

さて、線型加速度法によれば、時間間隔kT_0 (T_0: 固有周期) とするときのたわみ$\overline{\boldsymbol{\delta}}$, 速度$\overline{\boldsymbol{v}}$, および加速度$\overline{\boldsymbol{\alpha}}$に関して次の式が成立する。

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}_{i+1} = \overline{\boldsymbol{\delta}}_i + 2\pi k \overline{\boldsymbol{v}}_i + \frac{4}{3}\pi^2 k^2 \overline{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{4}{6}\pi^2 k^2 \overline{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1} \quad \text{------(14)}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}}_{i+1} = \overline{\boldsymbol{v}}_i + \pi k (\overline{\boldsymbol{\alpha}}_i + \overline{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1}) \quad \text{------(15)}$$

ここに　$\overline{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\delta}\,\omega_0^2/\alpha_s$,　$\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}\,\omega_0/\alpha_s$,　$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}/\alpha_s$,　$\omega_0 = 2\pi/T_0$

式(13), (14)を連立させて加速度($\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1}$)について解けば次式をえる。

$$\mathbb{U}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1} = \mathbb{V}_i + \mathbb{W}_{i+1} \qquad \overline{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1} = \mathbb{U}^{-1}(\mathbb{V}_i + \mathbb{W}_{i+1}) \quad \text{------(16)}$$

ここに　$\mathbb{U} = -\{K K' \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\mathbb{C}}\,\overline{\mathbb{m}} + \frac{4}{6}\pi^2 k^2\}$, $\mathbb{V}_i = \overline{\boldsymbol{\delta}}_i + 2\pi k \overline{\boldsymbol{v}}_i + \frac{4}{3}\pi^2 k^2 \overline{\boldsymbol{\alpha}}_i$, $\mathbb{W}_{i+1} = -\{K K' \overline{q}_0 \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}{}_q^y\,\overline{\boldsymbol{q}}{}^y_{i+1} + K' \overline{\mathbb{A}}\,\mathbb{J}\,\overline{\boldsymbol{\phi}}{}^p_{i+1}\}$

式(16)の塑性曲率$\overline{\boldsymbol{\phi}}{}^p$は式(5)より次のように求められる。

$$\overline{\boldsymbol{\phi}}{}^p = \overline{\boldsymbol{\phi}} - \overline{\mathbb{M}} \qquad \text{ただし} \qquad \overline{\boldsymbol{\phi}} = (\overline{\mathbb{A}}{}^y)^{-1} \overline{\boldsymbol{\delta}}{}^y / K' \quad \text{------(17)}$$

なおアーチに働く軸力N_rは次式で与えられる。

$$N_r = V_A \sin\theta_r + H_A \cos\theta_r + N_{pr}^y + N_{pr}^x + N_{qr}^y \quad \text{------(18)}$$

ここに、$V_A = R m_0 \alpha_s (\overline{\boldsymbol{\beta}}_p \overline{\mathbb{P}} + \overline{q}_0 \overline{\boldsymbol{\beta}}_q \overline{\boldsymbol{q}})$: A端の垂直反力, $H_A = -\{R m_0 \alpha_s \overline{\boldsymbol{\Delta}}\,\overline{\mathbb{P}}{}^x + \frac{M_y}{R}\overline{H}_B\}$: A端の水平反力

$N_{pr}^y = R m_0 \alpha_s \overline{\mathbb{V}}{}_p^y\,\overline{\mathbb{P}}{}^y$, $N_{pr}^x = R m_0 \alpha_s \overline{\mathbb{V}}{}_p^x\,\overline{\mathbb{P}}{}^x$, $N_{qr}^y = R\,\overline{q}_0\, m_0 \alpha_s \overline{\mathbb{V}}{}_q^y\,\overline{\boldsymbol{q}}{}^y$

以上の誘導諸式を用いれば2ヒンジアーチの弾塑性振動応答解析が可能となる。すなわち時刻$i+1$の加速度を式(16)によって推定し、式(14)よりたわみ$\overline{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}$を算出する。次いで式(17)より曲率$\overline{\boldsymbol{\phi}}_{i+1}$を決定した上で文献(1)の方法により$\overline{\mathbb{M}}_{i+1}$を、したがって$\overline{\boldsymbol{\phi}}{}^p_{i+1}$を求め再度式(16)によって加速度$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1}$を定める。以下この方法で各値が収束するまでくり返す。なお、計算例は講演時に発表する予定である。

Ⅴ　結語

本研究において2ヒンジアーチ橋の弾塑性応答解析が一般的に可能となった。すなわち本理論を用いることにより、地震などの過大な周期外力を受けるアーチ橋の動的破壊メカニズムがコンピューターを用いることにより自動的に追跡解明することが可能になったと言える。なお構造、断面諸量などの動的力学特性に及ぼす影響などについては今後体系的に調べて逐次報告する予定である。

Ⅵ　文献

1) 太田「変動荷重を受けるはりの動的弾塑性解析」第18回橋梁構造工学研究発表会　1971. 12.

2) 石川「ラーメンおよびアーチの弾塑性解析に関する研究」　学位論文　1968. 12.