

長崎大学 正員 高橋和雄
 九州大学 正員 橋本 武
 長崎大学 学生員 坂東啓一郎
 長崎大学 学生員 小嶺啓蔵

1 緒言

く形板あるいは柱で支持される無梁板の固有振動数をあらかじめ予測することは、振動体や移動荷重を受けると考えられる床組の設計に際して極めて重要なことである。従来多くの研究者によつて、く形板の動的挙動の研究がなされているが、中間にて柱で支持されるような無梁板の振動解析の研究は未だ十分ではない。そこで着るはこの種の問題に関する研究を行っているが、すでにその成果の一部として、中間で点支持される無梁板の自由振動の解析を発表している。

つづいて本論文では周辺で単純支持され、中間にて任意配列の柱で支持されることき無梁板構造(図-1参照)の自由振動の厳密解を振動の基礎微分方程式を直接解くことにより理論解を求めるとともに、ジュラルミン板にて振動実験を行ない理論値と比較検討するものである。本研究の理論解の誘導に際して、前研究と異なる点は、(1)柱の曲げ剛性の影響が考慮されていること、および(2)柱断面幅の影響が近似的に考慮されていることである。

2 解法

無梁板構造の低次の線形曲げ振動を対象とすれば、板の面内力、剪断変形および回転慣性の影響は無視できる。板が振動すれば中間柱の位置で x 方向の垂直反力と柱の曲げ抵抗を生じるが、これらを柱断面全領域にわたって等分布ならびに、三角形分布する強制力とみなして、板の強制振動に関する微分方程式を解けば、たわみに関する一般解 w が次式のように算定される。

$$w = W \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (1)$$

ここに、 w :板のたわみ、 ω 固有円振動数、 ε :初期位相角

$$W = (A_1 \sin \bar{\chi}_1 \xi + B_1 \cos \bar{\chi}_1 \xi + C_1 \sinh \chi_1 \eta + D_1 \cosh \chi_1 \eta) \sin \nu \pi \eta \\ + (A_2 \sin \bar{\chi}_2 \eta + B_2 \cos \bar{\chi}_2 \eta + C_2 \sinh \chi_2 \xi + D_2 \cosh \chi_2 \xi) \sin \mu \pi \xi \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \{ V_{ij} T_{ij}(\mu, n) + M_{ij}^x T_{ij}^x(\mu, n) + M_{ij}^y T_{ij}^y(\mu, n) \} \sin \mu \pi \xi \sin \nu \pi \eta / K_{\mu \nu} \quad (2)$$

$$\bar{\chi}_1 = \sqrt{\lambda^2 - (\frac{\mu \pi}{a})^2}, \quad \bar{\chi}_2 = \sqrt{\lambda^2 + (\frac{\mu \pi}{a})^2}, \quad \chi_1 = \mu / \lambda^2 + (M \pi)^2, \quad \chi_2 = \mu / \lambda^2 + (M \pi)^2, \quad \xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad M = b/a, \quad \lambda = \sqrt[4]{\rho \omega^2 / D}$$

(固有値), a :板の x 方向の長さ, b :板の y 方向の長さ, $D = E h^3 / \{ 12(1 - \nu^2) \}$ (板剛度), h :板厚, E :板の弾性係数,

ν :板のポアソン比, ρ :板の密度, $V_{ij} = -4\alpha^2 V_{ij} / (\pi^2 h D)$, $M_{ij}^x = 4\alpha M_{ij}^x / (\pi^2 h D)$, $M_{ij}^y = 4\alpha M_{ij}^y / (\pi^2 h D)$

$$T_{ij}^x(\mu, n) = 3 \{ \sin \mu \pi \nu_j - \nu_j (\mu \pi) \cos \mu \pi \nu_j \} \sin \mu \pi \nu_j \cos \mu \pi \xi_i \sin \mu \pi \eta_j / (\nu_j^2 \nu_j \pi^2 \pi^2),$$

$$T_{ij}^y(\mu, n) = 3 \{ \sin \mu \pi \nu_j - \nu_j (\mu \pi) \cos \mu \pi \nu_j \} \sin \mu \pi \nu_j \cos \mu \pi \eta_j \sin \mu \pi \xi_i / (\nu_j^2 \nu_j \pi^2 \pi^2),$$

$$T_{ij}^z(\mu, n) = \sin \mu \pi \xi_i \sin \mu \pi \eta_j \sin \mu \pi \nu_j \sin \mu \pi \nu_j / (\nu_j^2 \nu_j \pi^2 \pi^2), \quad K_{\mu \nu} = \{ m^2 + (n/\mu)^2 \}^2 - (\lambda/\pi)^4,$$

V_{ij} :柱 ij の垂直反力, M_{ij}^x :柱 ij の x 方向の反力モーメント, M_{ij}^y :柱 ij の y 方向の反力モーメント,

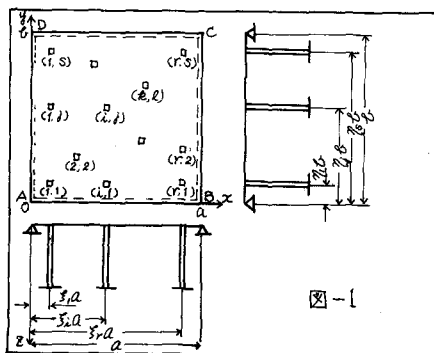


図-1

a_{ij} : 柱 ij の x 座標値, b_{ij} : 柱 ij の y 座標値, $2u_{ij}a$: 柱 ij の x 方向の幅, $2v_{ij}b$: 柱 ij の y 方向の幅, $M, N=1, 2, 3, \dots, A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y$: 積分定数

ところで、本題の無梁板は周辺で単純支持されているから、その境界条件は次のように表わせる。

$$\xi=0, 1 \text{ で } W=0, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}=0 \quad \eta=0, 1 \text{ で } W=0, \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}=0 \quad (3)$$

式(2)を式(3)に代入すれば、次の連立方程式が求められる。

$$\begin{Bmatrix} \langle K_0 \rangle_{44} & \langle O \rangle_{44} \\ \langle O \rangle_{44} & \langle K_0^2 \rangle_{44} \end{Bmatrix} \{ A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y \}^T = 0 \quad (4)$$

$$\text{ここに } \begin{Bmatrix} \langle K_0 \rangle_{44} \\ \langle O \rangle_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{\lambda}_1^2 & 0 & \bar{\lambda}_1^2 \\ \sin \bar{\lambda}_1 & \cos \bar{\lambda}_1 & \sinh \bar{\lambda}_1 & \cosh \bar{\lambda}_1 \\ -\bar{\lambda}_1^2 \sin \bar{\lambda}_1 & -\bar{\lambda}_1^2 \cos \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_1^2 \sinh \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_1^2 \cosh \bar{\lambda}_1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \langle K_0^2 \rangle_{44} \\ \langle O \rangle_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{\lambda}_2^2 & 0 & \bar{\lambda}_2^2 \\ \sin \bar{\lambda}_2 & \cos \bar{\lambda}_2 & \sinh \bar{\lambda}_2 & \cosh \bar{\lambda}_2 \\ -\bar{\lambda}_2^2 \sin \bar{\lambda}_2 & -\bar{\lambda}_2^2 \cos \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_2^2 \sinh \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_2^2 \cosh \bar{\lambda}_2 \end{Bmatrix}$$

$\langle O \rangle_{44}$ は4行4列の零行列

次に変形条件について考える。無梁板構造の振動時における中間柱 ij の垂直変位を d'_{ij} とすれば、 d'_{ij} は垂直反力 V_{ij} と同じ時間 t の周期関数となり次式のように与えられる。

$$d'_{ij} = d_{ij} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (5)$$

ここで中間柱 ij の垂直変位が作用反力に比例するものとする。式(5)は次のように書き改められる。

$$d'_{ij} = \delta_{ij} V_{ij} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (6)$$

ここに、 δ_{ij} : 比例定数

板は柱で支持されているから、全ての柱位置における板のたわみ $w(\xi, \eta)$ は d'_{ij} に等しくなければならないということから次のような変位条件式を得る。

$$W(\xi_i, \eta_j) + \delta_{ij} V_{ij} = 0 \quad (7)$$

ここに、 $\delta_{ij} = \pi^4 M D \delta_{ij} / (4A^2)$

式(7)は全ての柱位置について考えられ、結局次のような連立方程式が求められることになる。

$$\{ \langle K_{ij}^x \rangle, \langle K_{ij}^y \rangle, \langle H_{ij}^x \rangle, \langle H_{ij}^y \rangle, \langle H_{ij}^z \rangle \} X = 0 \quad (8)$$

ここに、 $X = \{ A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y, V_{11}, \dots, V_{1r}, V_{21}, \dots, V_{2r}, M_{11}^x, \dots, M_{1r}^x, M_{11}^y, \dots, M_{1r}^y, M_{21}^x, \dots, M_{2r}^x, M_{21}^y, \dots, M_{2r}^y \}^T$

$\langle K_{ij}^x \rangle, \langle K_{ij}^y \rangle, \langle H_{ij}^x \rangle, \langle H_{ij}^y \rangle, \langle H_{ij}^z \rangle$ は4行 r 列の行列

また、中間柱 ij のたわみ角を θ'_{ij} とすれば、これは次式のように与えられる。

$$\theta'_{ij} = \theta_{ij} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (9)$$

一方一様断面柱に関する既往の振動たわみ角式から、板と柱の直結部において伝達される x および y 方向のモーメント M_{ij}^x, M_{ij}^y と、柱頭部の x, y 方向のたわみ角 $\theta_{ij}^x, \theta_{ij}^y$ との関係が算定できる(ただし、本論では柱下端が固定される場合のみを取り扱うものとする)。したがって、これらの結果から、柱位置 ij における板と柱とのたわみ角に関する変形条件が次式のように得られる。

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right]_{\xi_i, \eta_j}^x + \bar{c}_{ij}^x M_{ij}^x = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right]_{\xi_i, \eta_j}^y + \bar{c}_{ij}^y M_{ij}^y = 0 \quad (10)$$

ここに、 $\bar{c}_{ij}^x = \pi^4 / (4M_{ij}^x R_{ij}^x \alpha_{ij}^x)$, $\bar{c}_{ij}^y = \pi^4 / (4M_{ij}^y R_{ij}^y \alpha_{ij}^y)$, $M_{ij}^x = E_{ij}^x I_{ij}^x / (l_{ij} D)$

$M_{ij}^y = E_{ij}^y I_{ij}^y / (l_{ij} D)$, $R_{ij}^x = l_{ij} / (P_{ij} A_{ij} \omega^2 / (E_{ij}^x I_{ij}^x))$, $R_{ij}^y = l_{ij} / (P_{ij} A_{ij} \omega^2 / (E_{ij}^y I_{ij}^y))$, $I_{ij}^x = \frac{4}{3} M_{ij}^x v_{ij}^2 a^4$
 $I_{ij}^y = \frac{4}{3} M_{ij}^y v_{ij}^2 b^4$, $\alpha_{ij}^x = (\cosh R_{ij}^x \sin R_{ij}^x - \sinh R_{ij}^x \cos R_{ij}^x) / (1 - \cosh R_{ij}^x \cos R_{ij}^x)$,

$\alpha_{ij}^2 = (\cosh k_{ij} l_{ij} \sin k_{ij}^y - \sinh k_{ij}^y \cos k_{ij} l_{ij}) / (1 - \cosh k_{ij} l_{ij} \cos k_{ij}^y)$, E_{ij}^x ; 柱 ij の x 方向弾性係数
 E_{ij}^y ; 柱 ij の y 方向弾性係数, A_{ij} ; 柱 ij の断面積, ρ_{ij} ; 柱 ij の密度, l_{ij} ; 柱 ij の長さ
 式(10)を全ての柱位置について考えると次の連立方程式を得る。

$$[\langle \Theta_{ij}^x \rangle \langle \Theta_{ij}^y \rangle \langle P_{ij} \rangle \langle P_{ij}^x \rangle \langle P_{ij}^y \rangle] X = 0, \quad [\langle T_{ij}^x \rangle \langle T_{ij}^y \rangle \langle U_{ij} \rangle \langle U_{ij}^x \rangle \langle U_{ij}^y \rangle] X = 0 \quad (11)$$

ここに, $\langle \Theta_{ij}^x \rangle, \langle \Theta_{ij}^y \rangle, \langle P_{ij} \rangle, \langle P_{ij}^x \rangle, \langle P_{ij}^y \rangle, \langle T_{ij}^x \rangle, \langle T_{ij}^y \rangle, \langle U_{ij} \rangle, \langle U_{ij}^x \rangle, \langle U_{ij}^y \rangle$ は 4 行 1 列の行列
 結局, 式(4), 式(8), 式(11)を連立させることにより, 未知数 $A_x, B_x, \dots, D_x, A_y, B_y, \dots, D_y, M_{11}^x, \dots, M_{15}^x, M_{11}^y, \dots, M_{15}^y$
 を求めるための基本連立方程式が得られ, これより振動数方程式が次のように算定されることになる。

$$\begin{vmatrix} \langle K_0^x \rangle_{44} & \langle 0 \rangle_{44} & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle_{44} & \langle K_0^y \rangle_{44} & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle K_0^x \rangle & \langle K_0^y \rangle & \langle H_0 \rangle & \langle H_0^x \rangle & \langle H_0^y \rangle \\ \langle \Theta_0^x \rangle & \langle \Theta_0^y \rangle & \langle P_0 \rangle & \langle P_0^x \rangle & \langle P_0^y \rangle \\ \langle T_0^x \rangle & \langle T_0^y \rangle & \langle U_0 \rangle & \langle U_0^x \rangle & \langle U_0^y \rangle \end{vmatrix} = 0 \quad (12) \quad \langle K_0^x \rangle_{44} = 0, \langle K_0^y \rangle_{44} = 0 \quad (13)$$

なお式(12)の演算に当って, これを直接解く代わりに次の3つに分けて解くことが実用上好都合である。

$$\begin{vmatrix} \langle H_0 \rangle & \langle H_0^x \rangle & \langle H_0^y \rangle \\ \langle P_0 \rangle & \langle P_0^x \rangle & \langle P_0^y \rangle \\ \langle U_0 \rangle & \langle U_0^x \rangle & \langle U_0^y \rangle \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

式(13)の解は式(12)の必要条件であって, 必要十分条件でないことに注意する必要がある。

3 理論値と実験値との比較検討

スパン 380×380 mm のジュラルミン板 ($\nu = 0.33$, $\rho = 0.272 \times 10^{-6} \text{ g/cm}^3$, $E = 0.75 \times 10^7 \text{ g/cm}^2$) が, 周辺で単純支持され, 板中心にて角鋸柱 ($\rho_c = 0.801 \times 10^{-6} \text{ g/cm}^3$, $E = 0.210 \times 10^8 \text{ g/cm}^2$, $l_c = 380 \text{ mm}$) で支持されるものとすれば, その振動数方程式は式(14)より次のように与えられる。

$$\begin{vmatrix} H_{11}'' & 0 & 0 \\ 0 & P_{11}'' + C_{11}'' & 0 \\ 0 & 0 & U_{11}'' + C_{11}'' \end{vmatrix} = 0 \quad (15) \quad \text{ここに, } H_{11}'' = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{2m\pi}{2} \sin^2 \frac{2n\pi}{2} \sin m\pi u \sin n\pi v / (K_{mn} u v m^2 n^2 \pi^2)$$

$P_{11}'' = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 3m\pi \{ \sin m\pi u - u_1 m\pi \cos m\pi u \} \sin n\pi v \cos^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{2n\pi}{2} / (K_{mn} u_1^3 v_1 m^3 n^2 \pi^3)$
 $U_{11}'' = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 3n\pi \{ \sin n\pi v - v_1 n\pi \cos n\pi v \} \sin m\pi u \sin^2 \frac{m\pi}{2} \cos^2 \frac{2n\pi}{2} / (K_{mn} u_1 v_1^3 m^2 n^3 \pi^3)$
 式(15)から, 本例の固有値は, 垂直反力の項 H_{11}'' と反力モーメントの項 $P_{11}'' + C_{11}''$, $U_{11}'' + C_{11}''$ とからそれぞれ独立に求められ, また振動数は $n = \omega/2\pi = \sqrt{E/\rho A}$ より算定される。これらの式を用いて 1 次 2 次振動について柱幅および板厚の変化に伴う固有値と振動数の変動を求めれば, 表-1 の諸値を得る。次にこれらの振動のたわみモード, およびびずみモードを求め, その結果の一部を示せば図-2 のとおりである。

計算例と同じ無梁板について振動実験を試みた。この実験に用いた計測装置は図-3 に示すとおりである。振動数に関する両者の誤差は 3~4% である。なお, 本計算例では

u, v h (mm)	1 次振動						2 次振動					
	0.015	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.015	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04
1.0	(1) 7.249	7.279	7.290	7.303	7.318	7.334	7.499	7.532	7.560	7.645	7.688	7.730
	(2) 93.52	93.77	94.07	94.41	94.78	95.19	99.53	100.95	102.2	103.4	104.6	105.8
1.2	(1) 7.249	7.279	7.290	7.303	7.318	7.334	7.495	7.531	7.560	7.644	7.688	7.730
	(2) 112.2	112.5	112.9	113.2	113.7	114.2	119.3	121.1	122.7	124.1	125.5	127.1
1.65	(1) 7.249	7.279	7.290	7.303	7.318	7.334	7.482	7.545	7.597	7.643	7.687	7.729
	(2) 154.3	154.7	155.2	155.8	156.4	157.1	163.5	166.3	168.5	171.6	172.6	174.5

(1) 固有値 (2) 振動数 表-1

1 次振動 (対称振動) は当然のことであるが, 2 次振動 (逆対称振動) においても, 柱の剛性がジュラルミンのそれに比べてかなり大きいので, 柱の曲げ変形は殆んど起こらないという結果になっている。しかし, 固有値あるいは振動数については, 例えば $u = v = 0.015$ と $u = v = 0.04$ ($h = 1.0 \text{ mm}$) の場合では, 1 次振動で 9% の差異であるのに対し, 2 次振動では 20% の差異を生じていることがわ

かり、柱の曲げ剛性の影響が無視できない。

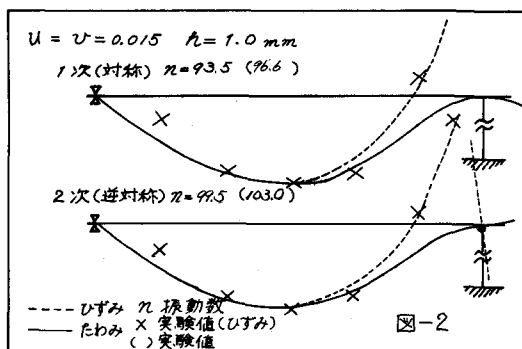


図-2

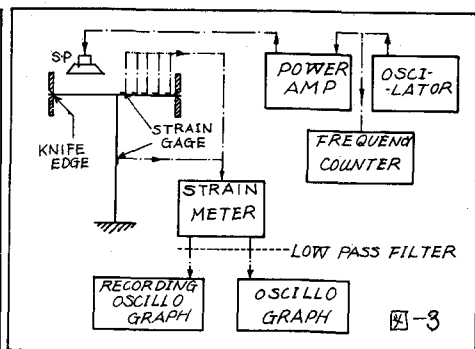


図-3

4 結語

本研究により、中間柱を有する周辺単純支持無梁板の固有振動数が求められた。振動数は、板厚や柱幅が増大するにつれ増加するが、その割合は、1次振動、2次振動で違い、1次は柱の剛性の影響が入ってこないでその変化は小さいが、2次は柱が振動するから、剛性の影響が入り変化は大きい。前述のように、実験値と理論値はよく一致しており、本理論解の妥当性が確認されたが、理論解の誘導に当っては、板と柱の直結部において、応力は柱の幅全域にわたってその分布を仮定したのに対し、変形条件式は柱の中心部のみで考えたので、柱幅が増大すると誤差が大きくなるものと推定される。したがって今後、柱幅および板厚を変えて種々の模型実験を行なうことにより、本法の適用できる範囲について検討する必要がある。

参考文献

- 1) 樗木 武・篠崎 正；中間にて点支持される直交異方性く形板の自由振動，第25回土木学会年次学術講演集，第1部 昭和45年10月
- 2) 樗木 武；無梁板構造の解法に関する研究(学位論文)