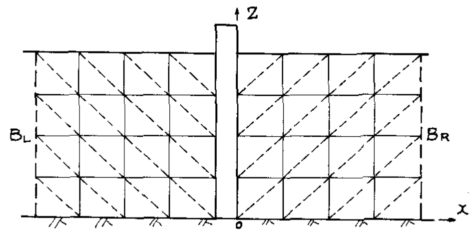
Ⅰ－7　　FEMによる地中基礎の調和解析

熊本大学工学部　正　員　　秋吉　卓
熊本大学工学部　学生員　　河津洋一
熊本大学工学部　学生員　○古川和義

1．まえがき　現在まで地中にその基礎を打設された構造物の動的応答ないしはその評価について多くの研究がなされ，特に地盤を連続弾性体とする場合の解析結果より多くの有益な資料を耐震工学上にもたらした。しかしながら土を連続体として取扱う場合に，厳密解が得られるのはごく簡単なモデルに限られており，これにかわって離散型モデル，特に有限要素法（FEM）による解析が一般化しつつあるが，これは連続体解析と同様に体積・せん断変形を容易に考慮することができる点で，バネ・ダシュポットで構成される系よりモデルの取扱いが簡単になる利点があるようである。いずれにしても計算機容量からそれほど節点数を多く取えないので，これに半無限地盤としての特性を持たせるように連続体解析の概念を境界条件に反映させた，Lysmer[1]らの方法が注目されよう。本研究における境界条件の処理もこれによった。

2．モデル化と解析　図－1のように構造物が表層地盤中に根入れされ，堅い基礎に達している系を考える。このとき表層を図－1のように等分割の矩形要素の集合とするとき，水平変位のみを考慮すると図－2よりある要素の水平変位$\delta(x',z')$は



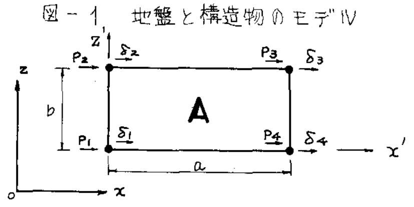
図－1　地盤と構造物のモデル

$$\delta(x',z')=[N_1,N_2,N_3,N_4]\{\delta\}^e \quad \text{-------}(1)$$

ここに$\{\delta\}^{eT}=\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$，$N_1=(1-\frac{x}{a})(1-\frac{z}{b})$，
$N_2=(1-\frac{x}{a})\frac{z}{b}$，$N_3=\frac{x}{a}\cdot\frac{z}{b}$，$N_4=\frac{x}{a}(1-\frac{z}{b})$

したがって線形の応力－ひずみの関係から，要素内応力は，

$$\{\varepsilon\}^e=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=[D]\{\delta\}^e,\ \{\sigma\}^e=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}=[N][D]\{\delta\}^e \cdots(2)$$



図－2　要素における力－変位関係

ただし，$[D]=\frac{1}{ab}\begin{bmatrix}-(b-z), & -z, & z, & b-z\\ -(a-x), & a-x, & x, & -x\end{bmatrix}$，$[N]=G\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\alpha=2(1-\nu)/(1-2\nu)$，$\nu$: Poisson ratio

ここで要素の持つひずみエネルギーUは次式で与えられる。

$$U=\frac{1}{2}\iint_e\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV=\frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}\iint[D]^T[N][D]\cdot t\,dxdz\cdot\{\delta\}^e \quad \text{-----}(3)$$

Castiglianoの定理をUに適用すると，要素Aを$[K]^e\{\delta\}^e=\{P\}^e$となる剛性マトリックス$[K]$は

$$[K]^e=t\iint_A[D]^T[N][D]\,dxdz=\frac{Gt}{6ab}\begin{bmatrix}2(a^2+\alpha b^2), & -2a^2+\alpha b^2, & -(a^2+\alpha b^2), & a^2-2\alpha b^2\\ -2a^2+\alpha b^2, & 2(a^2+\alpha b^2), & a^2-2\alpha b^2, & -(a^2+\alpha b^2)\\ -(a^2+\alpha b^2), & a^2-2\alpha b^2, & 2(a^2+\alpha b^2), & -2a^2+\alpha b^2\\ a^2-2\alpha b^2, & -(a^2+\alpha b^2), & -2a^2+\alpha b^2, & 2(a^2+\alpha b^2)\end{bmatrix} \quad \text{-----}(4)$$

取扱うべき有限領域が図－1のB_LとB_Rの間の部分であるとき，全要素の釣合い方程式において加えるべき拘束を$\{T\}_R$，$\{T\}_L$とすると，これらは連続体としたときに生ずべき応力と等価な節点力ベクトルに他ならず，応力－ひずみの関係より境界節点変位$\{u\}_R$，$\{u\}_L$と次の関係で結ばれよう。

$$\{T\}_R=[R]_R\{u\}_R,\quad \{T\}_L=[R]_L\{u\}_L \quad \text{-------}(5)$$

かくして地盤の全領域を考慮した運動方程式は次式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{P\}+[R]_R\{u\}+[R]_L\{u\} \qquad ---(6)$$

ここに，$[M]$:全質量マトリックス(対角)，$[K]$:全剛性マトリックス，$\{u\}$:全節点変位ベクトル，$\{P\}$:全節点外力，$[R]_R, [R]_L$:境界 B_R, B_L における境界マトリックスを全領域へ拡大したマトリックス。構造物のみが強制調和振動，$\{P\}=\{Q\}\exp(i\omega t)$を行なうときは，地盤の応答は $\{u\}=\{u\}_0\exp(i\omega t)$ とすると，基盤面で適当な拘束を入れることにより，$\{u\}$ は式(6)から次式のように算出される。

$$\{u\}=[\bar{K}]^{-1}\{Q\}\exp(i\omega t) \qquad ----(7)$$

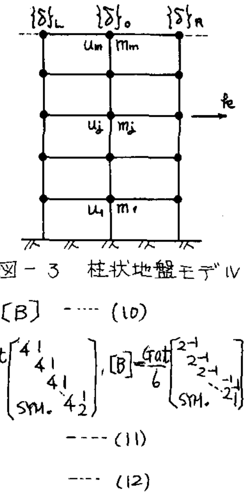
ただし，$[\bar{K}]=[K]-\omega^2[M]-[R]_R-[R]_L$，かつ構造物表面と接する節点変位 $\{u\}_1$，その他の全節点変位 $\{u\}_2$ が $\{u\}^T=\{\{u\}_1 \vdots \{u\}_2\}^T$。および $[\bar{K}]$ についても並べ換えられているものとする。このとき式(7)より

$$\begin{bmatrix}[\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}]\\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{u\}_1\\ \{u\}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{Q\}_1\\ \{Q\}_2\end{Bmatrix} \text{ かつ } \{Q\}_2=\{0\} \text{ であるから，} \begin{aligned}\{u\}_1&=\left[[\bar{K}_{11}]-[\bar{K}_{12}][\bar{K}_{22}]^{-1}[\bar{K}_{21}]\right]^{-1}\{Q\}_1=[K]_0^{-1}\{Q\}_1\\ \{u\}_2&=-[\bar{K}_{22}]^{-1}[\bar{K}_{21}][K]\{Q\}_1\end{aligned} \qquad ----(8)$$

となり，結局地中構造物に対する周辺地盤の剛性マトリックス $[K]_0$ は $[K]_0=[\bar{K}_{11}]-[\bar{K}_{12}][\bar{K}_{22}][\bar{K}_{21}]$ で与えられることが知られる。したがって剛な構造物の場合は加振力分布 $\{P\}_s$ に対する変位 $\{u\}_s$ は

$$[M]_s\{\ddot{u}\}_s+[K]_0\{u\}_s=\{P\}_s \qquad --------(9)$$

を解けばよいことになる。ただし $[M]_s$: 構造物の分割質量であり，基盤反力は無視している。



図－3 柱状地盤モデル

<u>3. 境界条件</u>　　2. では境界マトリックス $[R]$ が存在することを仮定したが，図－3において変位ベクトルの間に $\{\delta\}_L=\{\delta\}_0\exp(ika)$，$\{\delta\}_R=\{\delta\}_0\exp(-ika)$ の関係があるので，$\{\delta\}_0^T=\{u_1,\cdots,u_m\}$ に対する剛性マトリックス $[\tilde{K}]$ は $a \ll \lambda$(波長)の条件を考慮すると次式のようになる。

$$[\tilde{K}]=\frac{Gat}{b}\begin{bmatrix}2+\frac{2}{3}\alpha(bk)^2, & -1+\frac{\alpha}{6}(bk)^2 & & \\ -1+\frac{\alpha}{6}(bk)^2, & 2+\frac{2}{3}\alpha(bk)^2, & -1+\frac{\alpha}{6}(bk)^2 & \\ & \ddots & 2+\frac{2}{3}\alpha(bk)^2, & -1+\frac{\alpha}{6}(bk)^2\\ & & -1+\frac{\alpha}{6}(bk)^2, & 1+\frac{\alpha}{3}(bk)^2\end{bmatrix}=k^2[A]+[B] \qquad -----(10)$$

$$[A]=\frac{G\alpha abt}{6}\begin{bmatrix}4 & 1 & & \\ & 4 & 1 & \\ & & 4 & 1\\ \text{SYM.} & & & 4\ 2\end{bmatrix},\ [B]=\frac{Gat}{6}\begin{bmatrix}2 & -1 & & \\ & 2 & -1 & \\ & & 2 & -1\\ \text{SYM.} & & & 2\ 1\end{bmatrix}$$

質点の自由振動は次式で与えられる。

$$[\tilde{M}]\{\ddot{u}\}+\{\theta\}=\{0\},\ [\tilde{M}]=\begin{bmatrix}m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n\end{bmatrix}: \{\delta\}_0 \text{に対する質量マトリックス} \qquad ----(11)$$

これより　$\left[[\tilde{K}]-\omega^2[M]\right]\{\delta\}_0=\{0\}$　あるいは　$\left[[C]-k^2[A]\right]\{\delta\}_0=\{0\}$ $\qquad ----(12)$

を満たす固有方程式は　$\left|[C]-k^2[A]\right|=0$ $\qquad ----(13)$

となる。式(13)の固有値 k_s^2 は，一定の ω に対して m 個存在し，これに対するモーダルマトリックス $[V]=[\{v\}_1,\{v\}_2,\cdots,\{v\}_m]$ が得られるので，$[V]^T[A][V]=[I]$ のように正規化しておく。またこの k_s ($s=1,\cdots,m$) は，k_s^2 が正，負の各れかになるので，正の実数(伝播性)，負の純虚数(距離減衰性)が対応する。かくして任意の変位分布 $\{u\}^T=\{u_1,\cdots,u_m\}$ は $[V]$ を用いて，展開係数 $\{\alpha\}$ に対して $\{u\}=\sum_{\alpha=1}^{m}\alpha_s v_s=[V]\{\alpha\}$ と展開しうる。したがって $\{\alpha\}=[V]^T[A]\{u\}$ とも書ける。

一方境界に生ずる応力と等価な節点力 $\{T\}$ は $\{\alpha\}$ を用いて $\{T\}=[A][V][H]\{\alpha\}=[A][V][H][V]^T[A]\{u\}$ であるから，$[R]=[A][V][H][V]^T[A]$ と表わしうる。$[H]=\begin{bmatrix}-ik_1 & & & \\ & -ik_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -ik_m\end{bmatrix}$

$x<0$ では k_s の符号を逆にとればよい。

1). J. Lysmer : Proc. ASCE, EM1, Feb. 1972, p 85～105