

九州大学 工学部 正員 橋 東一郎

" 大学院 学生員 〇小松 利光

まえがき

密度噴流の取扱ひにおいては、連行係数 E が重要な役割を果たすわけであるが、従来、Ellison and Turner による実験曲線が用いられており、理論的検討は試みられていないように思う。ここでは、連行係数 E について若干の理論的考察を加えてみた。

1. 現象を規定する基礎式

図-1に示すように、potential coreの消失した下流域を考え、表面流速、表面密度を U_s, ρ_s とする。現象を規定する基礎式は、

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (2)$$

$$\text{拡散方程式} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\text{平均流のエネルギー方程式} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \left(\frac{\rho}{\rho_s} - g y + \frac{1}{2} g^2 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v \left(\frac{\rho}{\rho_s} - g y + \frac{1}{2} g^2 \right) \right\} = \frac{u}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (4)$$

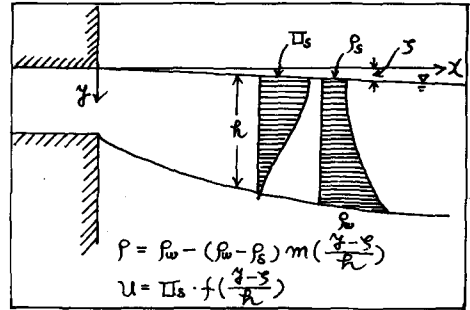


図-1

圧力は静水圧分布とし、躍層内では流速、密度分布はともに相似性が成り立つものと仮定して次式を用いる。

$$\rho = \rho_w - (\rho_w - \rho_s) m(\eta) \cdots (5), \quad u = U_s f(\eta) \cdots (6), \quad \eta = \frac{y-s}{h}$$

(1)(2)(3)(4)の各式を水表面から、躍層境界($s+h$)まで積分をすると、若干の計算の後、

$$\frac{d}{dx} [h U_s \alpha] = -V \quad (7) \quad \text{ここで } V \text{ は躍層境界における鉛直方向の流速}$$

$$\frac{d}{dx} [h U_s^2 \beta] = -\frac{d}{dx} (E_s g h^2) \lambda_c \quad (8) \quad E_s = (\rho_w - \rho_s) / \rho_w, \quad \alpha = \int_0^1 f d\eta, \quad \beta = \int_0^1 m f d\eta$$

$$\frac{d}{dx} [E_s U_s h \beta] = 0 \quad (9) \quad r = \int_0^1 f^2 d\eta, \quad \delta = \int_0^1 f^3(\eta) d\eta$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \delta h U_s^3 \right] + \frac{d}{dx} [E_s g h^2 U_s \mu] = - \int_0^{s+h} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (10)$$

ここで $\lambda_c = \int_0^1 m(\eta) d\eta - \int_0^1 d\eta \int_0^\eta m(\eta) d\eta$, $\mu = \int_0^1 f(\eta) d\eta \cdot \int_0^1 m(\eta) d\eta - \int_0^1 f(\eta) \int_0^\eta m(\eta) d\eta d\eta$ を得る。次に乱れエネルギー、 $C^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2$ の方程式

$$\frac{D}{Dt} \{C^2\} = 2 \cdot \frac{\tau}{\rho} \frac{du}{dy} - 2 K_p \frac{g}{\rho} \frac{ds}{dy} - \frac{10V}{\lambda^2} C^2 - \frac{d}{dy} (V^2 C^2) - P' \quad (11)$$

に於いて、 $\frac{\tau}{\rho} = \frac{1}{3} C \ell \left(\frac{du}{dy} \right)$, $K_p = \alpha \cdot \frac{1}{3} C \cdot \ell$ とし、混合距離 ℓ とTaylorのmicro scale λ との関係としては、栗原教授により与えられている $\ell^2 / \lambda^2 = C \ell / 40V$ を用いる。

C 及 ℓ は近似的に y 方向には一様であるとし、圧力変動による乱れ生成の項 P' は無視する。

また混合距離 ℓ は躍層水深 h に比例するとして、 $\ell = \beta \cdot h$ とおくと、(11)式の水表面から躍層境界

(5+6)までの積分は次式の如くなる。

$$\frac{1}{c\beta_* U_s^2} \frac{d}{dx} [c^2 U_s \alpha h] = \frac{2}{3} \int_0^1 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta - \frac{2}{3} \alpha_* \cdot \frac{E_s g h}{U_s^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{\beta_*^2} \left(\frac{C}{U_s} \right)^2 \quad (12)$$

次に(7)(8)(9)式の関係を用いて(10)式の左辺が *entrain* 流速 $-V$ を含む形に変形すると、若干の計算の後、次式が得られる。

$$-\frac{V}{\alpha U_s} (\equiv E) = \frac{C}{U_s} \frac{2}{3} \frac{\beta_*}{8} \int_0^1 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta \cdot \chi \left(\frac{1}{F^2} \right) \quad (13)$$

$$\text{ここに, } \chi \left(\frac{1}{F^2} \right) = 1 / \left\{ 1 + \frac{4}{F^2} \frac{\frac{3}{2} \frac{\lambda}{F} - \frac{\mu}{8} + \frac{1}{2} \frac{1}{F^2} \frac{\lambda}{F} \frac{\mu}{8}}{1 - \frac{\frac{3}{2} \frac{\lambda}{F} - \frac{\mu}{8}}{F^2}} \right\}, \quad \frac{1}{F^2} = \frac{E_s g h}{U_s^2} \quad (14)$$

同様に(12)式の左辺を計算すると、近似的に

$$\frac{1}{c\beta_* U_s^2} \frac{d}{dx} (c^2 U_s \alpha h) \approx \frac{V}{U_s} \left(\frac{C}{U_s} \right) \frac{1}{\beta_*} \Gamma \left(\frac{1}{F^2} \right) \quad (15)$$

となるから(13)式を代入して $\frac{V}{U_s}$ を消去すると、乱れエネルギーの方程式は次式のようになる。

$$\left(\frac{C}{U_s} \right)^2 = \left\{ \int_0^1 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta - \frac{\alpha_*}{F^2} \right\} / \left\{ \frac{3}{8} \frac{1}{\beta_*^2} - \frac{\alpha}{\beta} \chi \left(\frac{1}{F^2} \right) \cdot \Gamma \left(\frac{1}{F^2} \right) \int_0^1 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta \right\} \quad (16)$$

ここで、 $\Gamma \left(\frac{1}{F^2} \right) = \left\{ 1 + \frac{1}{F^2} \frac{6\lambda}{8} \right\} / \left\{ 1 - \frac{1}{F^2} \frac{2\lambda}{8} \right\}$ 、さらに(13)式における C/U_s に(16)式を代入すると

$$E = -\frac{V}{\alpha U_s} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta_*}{8} \cdot \delta_f \cdot \chi \left(\frac{1}{F^2} \right) \sqrt{\left(\delta_f - \frac{\alpha_*}{F^2} \right) / \left\{ \frac{3}{8} \frac{1}{\beta_*^2} - \frac{\alpha}{\beta} \chi \left(\frac{1}{F^2} \right) \cdot \Gamma \left(\frac{1}{F^2} \right) \cdot \delta_f \right\}} \quad (17)$$

となる。ここで $\delta_f = \int_0^1 \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta$ 、(17)式より、連行係数は流速分布 f 、密度分布 m による係数を含みながら、 $1/F^2 = (\alpha^2/\theta) Ri$ に規定されることがわかる。ここで $\theta = \int_0^1 m d\eta$

(17)式で $1/F^2 \rightarrow 0$ の場合が *homogeneous jet* に相当する。

この場合の連行係数は、 $-(V/\alpha U_s)_0 = E_0 = 0.075$ 程度で、 E_0 の式は近似的に

$$E_0 \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta_*^2}{8} \sqrt{\frac{8}{3}} \delta_f^{3/2} \quad (18)$$

である。流速分布として、我々の実験結果から $f(\eta) = 1.17\eta^3 - 2.33\eta^2 + 0.16\eta + 1$ を用い(18)式で $E_0 = 0.075$ として β_* を逆算すると $\beta_* = 0.140$ となりほぼ妥当な値が得られる。

上述の流速分布、 $\beta_* = 0.140$ 及び、同じく実

験結果から密度分布を $m(\eta) = -0.833\eta^2$

$-0.167\eta + 1$ として諸定数を求めると $\alpha = 0.596$

$\beta = 0.462$, $\gamma = 0.393$, $\theta = 0.638$, $\mu = -0.151$,

$\lambda = 0.235$, $\delta = 1.180$ となる。そこで(17)式

を用いて E を Richardson 数の関数として計算を行なった。その結果が図-Ⅱである。

かなり荒っぽい理論であるが $\alpha_* = 2.50$ の場合

Ellison & Turner の実験曲線とかなり

良い一致を示している。

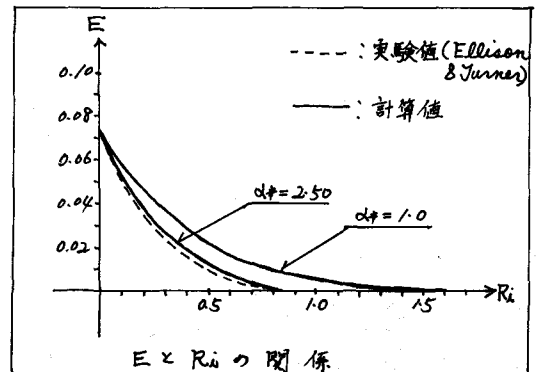


図 - 2