

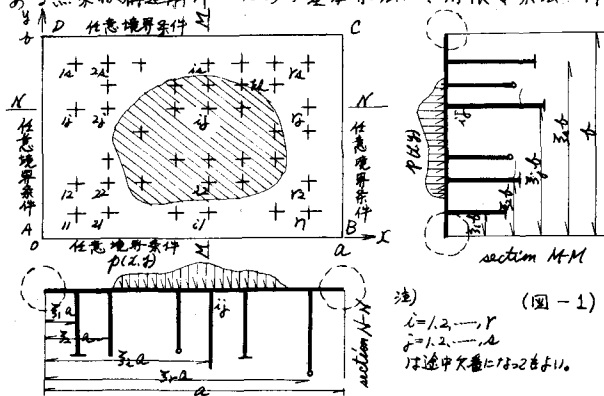
九州大学 正員 橋本 武

九州大学 学生員 ○中村龍一

1. 緒言 無梁板構造の影響面を論じたものに、R.E. Wooding⁰らの研究および著者1人の研究²⁾がある。前者は9パネル無梁板構造を対象として差分法より解析したものであり、後者は1対辺が単純支持である無梁板構造を対象として級数法により解析したものである。これに対し、本研究は、任意境界条件を有する無梁板構造の影響面解法を提示するものであり、解析に当っては、精度の向上と演算力軽減の関心から、著者1人の提案である無梁板構造解析のための基本系法に、有限要素法を併用することと工夫がなされている。

2. 基本系法の要旨

図-1に示すとき無梁板構造において、中間柱の拘束を除去した状態を基本板とする。しかるに、本題の無梁板構造は、外荷重の他に、中間柱から板に伝達される不静定力を荷重として同時に受ける板構造の問題に帰着せしめることができ、次のように解析される。



いま、柱の垂直反力を V_{ij} 、 x および y 軸方向の反力モーメントを M_{ij}^x 、 M_{ij}^y とすれば、これら未知不静定力を求める為の基本連立方程式は次のようである。

$$\begin{pmatrix} \langle H_{k1}^{11} \rangle & \langle H_{k1}^{12} \rangle & \langle H_{k1}^{13} \rangle \\ \langle O_{k1}^{11} \rangle & \langle O_{k1}^{12} \rangle & \langle O_{k1}^{13} \rangle \\ \langle Q_{k1}^{11} \rangle & \langle Q_{k1}^{12} \rangle & \langle Q_{k1}^{13} \rangle \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} L_{ij} - \frac{H^2}{4a^2} L_{ij}) \\ (\frac{\partial^2}{\partial x^2} L_{ij}^x - \frac{H^2}{4a^2} O_{ij}^x) \\ (\frac{\partial^2}{\partial x^2} L_{ij}^y - \frac{H^2}{4a^2} O_{ij}^y) \end{pmatrix} \quad (1) \quad X = \left[(V_{ij}) \left(-\frac{1}{a} M_{ij}^x \right) \left(-\frac{1}{a} M_{ij}^y \right) \right]^T$$

式中左辺の $H_{k1}^{11} \sim O_{k1}^{13}$ は、基本板に単位垂直力および x 、 y 方向の単位モーメントを作用させたとき、板のたわみおよび x 、 y 方向のたわみ角で定義される内容のものであり、 L_{ij} 、 O_{ij}^x 、 O_{ij}^y は、無梁板構造における柱 ij の頭部の垂直変位および x 、 y 方向のたわみ角である。上式より不静定力を求めれば、無梁板構造における板上の任意点の断面諸量も、次式によって算定されることになる。

$$\begin{aligned} W &= W_0 - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} W_{kl} - M_{kl}^x W_{kl}^x - M_{kl}^y W_{kl}^y) \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial W_0}{\partial x} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial W_{kl}}{\partial x} - M_{kl}^x \frac{\partial W_{kl}^x}{\partial x} - M_{kl}^y \frac{\partial W_{kl}^y}{\partial x}) \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial W_0}{\partial y} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial W_{kl}}{\partial y} - M_{kl}^x \frac{\partial W_{kl}^x}{\partial y} - M_{kl}^y \frac{\partial W_{kl}^y}{\partial y}) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial x^2} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial x^2} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial x^2}) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial y^2} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial y^2} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial y^2}) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial x \partial y} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial x \partial y} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial x \partial y}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial x^2} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial x^2} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial x^2}) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial y^2} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial y^2} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial y^2}) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial x \partial y} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial x \partial y} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial x \partial y}) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2 \partial y} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial x^2 \partial y} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial x^2 \partial y} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial x^2 \partial y}) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y^2} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial x \partial y^2} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial x \partial y^2} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial x \partial y^2}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2 \partial y} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial x^2 \partial y} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial x^2 \partial y} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial x^2 \partial y}) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y^2} - \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} \frac{\partial^2 W_{kl}}{\partial x \partial y^2} - M_{kl}^x \frac{\partial^2 W_{kl}^x}{\partial x \partial y^2} - M_{kl}^y \frac{\partial^2 W_{kl}^y}{\partial x \partial y^2}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. 不静定力の影響面

影響面を求めるには、柱の沈下を考慮する必要はないので $d_{ij} = 0$ (3) とする。また、 x および y 方向の柱頭回転角 θ_{ij}^x 、 θ_{ij}^y と反力モーメント M_{ij}^x 、 M_{ij}^y は既知のたわみ角式から、次式のように求められる。

$$\theta^x = -\frac{1}{a} M_{ij}^x, \quad \theta^y = -\frac{1}{a} M_{ij}^y \quad (4)$$

式(3)および式(4)を式(1)に代入すれば、次のようになる。

$$A \cdot X = \frac{A^0}{4} L \quad (5) \quad A = \begin{bmatrix} \langle H_{11}^{11} \rangle \langle H_{12}^{11} \rangle \langle H_{13}^{11} \rangle \\ \langle O_{11}^{11} \rangle \langle O_{12}^{11} + \frac{A^0}{4} \tilde{\Gamma}_{12}^x \rangle \langle O_{13}^{11} \rangle \\ \langle O_{21}^{11} \rangle \langle O_{22}^{11} \rangle \langle O_{23}^{11} + \frac{A^0}{4} \tilde{\Gamma}_{23}^x \rangle \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} (L_{11}) \\ (L_{12}) \\ (L_{13}) \end{bmatrix}$$

ここで、基本板に L_{1j} , L_{2j} , L_{3j} の荷重状態と同じ荷重を加えると、基本板の真上から下向きに起す垂直変位が $\frac{A^0}{4}$ 倍したものが L_{1j} であり、基本板の真上から、原真側からみて右回りに起すモーメントのたわみ角 θ_{1j}^x 、左回りに起すモーメントのたわみ角 θ_{2j}^x とそれぞれ $\frac{A^0}{4}$ 倍したものが L_{2j} , L_{3j} である。

本研究では、影響面を求めるものであるから、荷重状態は、任意真上に単位集中荷重である。従って、 θ_{1j}^x , θ_{2j}^x , θ_{3j}^x はいずれも基本板上の真上におけるたわみおよびたわみ角の影響面を表わしているものと解釈することになる。任意境界条件を有する基本板の影響面を厳密に算出することは、極めて困難であるが、近似的には有限要素法を求めることができる。すなわち、基本板に関する全体の剛性マトリックスの逆マトリックスの中に、真上のたわみおよびたわみ角の影響値が求められ、これを活用するものとし、 θ_{1j}^x , θ_{2j}^x , θ_{3j}^x の影響値とそれぞれ d_{1j} , θ_{2j}^x , θ_{3j}^x のように記号表示する。このとき、式(5)は次式のように書き改められる。

$$A \cdot X = \frac{A^0}{4} [(d_{1j})(\alpha \theta_{2j}^x) + \theta_{3j}^x]$$

上式から、不静定力影響面 $X = \frac{A^0}{4} A^{-1} [(d_{1j})(\alpha \theta_{2j}^x) + \theta_{3j}^x]^T$ (6) のように算定されることになる。

4. 断面諸量の影響面

a. たわみおよびたわみ角 $w_1, w_{1x}, w_{1x}^x, w_{1x}^y, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3}$ の諸量は、構造全体の剛性マトリックスの逆マトリックスの中に含まれており、これらの値と、式(6)の結果を式(2.1)に代入すれば、無梁板構造のたわみおよびたわみ角が求められることになる。

b. 断面力の影響面 板上の任意真上のモーメント M_0 とせん断力 Q_0 と曲率の関係は、周知のように次式で与えられる。

$$M_0 = D \cdot \chi_1 \quad (7) \quad M_0 = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}, \quad \chi_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \end{Bmatrix}$$

χ_1, χ_2 の影響値は、基本板の曲率の影響値と式(6)の結果と、それぞれ式(2.2)式(2.3)に代入することにより求められ、さらにその結果を式(7)に代入すれば、本題の無梁板構造のモーメントおよびせん断力の影響面を算定することができる。

5. 結語 本論文は、無梁板構造の曲げ問題の解法として、著者らが提案した基本系法と、その影響面解法に拡張応用したものである。すなわち、本法によれば、基本板の影響面を明らかにすれば、柱の形状や位置が種々に変化する無梁板構造の断面諸量の影響面を式(6)以後の簡単なマトリックス演算を行うのみで容易に求められることになり、演算労力の真に極めて有利なものとなり、その実用性が高く評価できるところである。

参考文献

- 1) R.E. Wooding & C.P. Sess; Influences for Continuous Plates, Proc. ASCE, vol. 74, ST-1, Jan. 1968
- 2) T. Chiyaki; Analysis of Influence Surfaces of Flat Slab Supported by Flexural Columns, Proc. of the 20th Jap. Nat. Cong. for Appl. Mech, 1990