I－33　　　周辺が弾性支持される扇形平板の解法

九州大学　学生員　金子忠男　○大塚久哲

1. 緒 言

日常多見される扇形平板は、曲線橋床版におけるごとく接線方向および半径方向に配置された床組材により弾性的に支持される場合がほとんどであり、かかる床版構造に外力が作用するとき扇形平板と骨組との間に生ずる力学的相互作用を明らかにすることは、その設計の上から極めて重要である。

本研究はこの目的から先に発表した直線辺が弾性支持される扇形平板の解法[1]に引き続き、(1)と同様の手法（差分法）を用いて、周辺が直線ばりあるいは円形曲りばりにて弾性支持される扇形平板の解法を提示するものである。

2. 解 法　　(1) 差分方程式

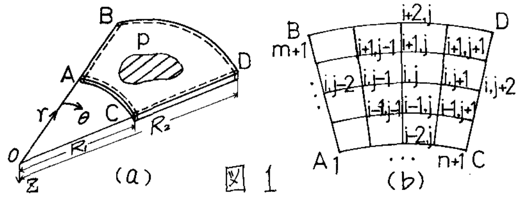
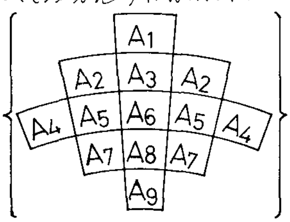


図 1

図1(a)に示すごとき扇形平板ABDCを放射状格子により分割し、格点に図1(b)のような番号を付すとき、格点(i,j)において板の基礎微分方程式を差分化すれば次式のとおりである。



$$w=\frac{p\lambda^4}{D}\quad\cdots(1)$$

ここに $A_1=1+\lambda/r_i$ ，$A_2=2\kappa^2(1-\lambda/2r_i)/r_i^2$ ，$A_4=\kappa^4/r_i^4$

$A_3=-4(1+\lambda/2r_i)-(1-\lambda/2r_i)(\lambda^2+4\kappa^2)/r_i^2$

$A_5=-4\kappa^2\{1-(\lambda^2-\kappa^2)/r_i^2\}/r_i^2$ ，$A_7=2\kappa^2(1+\lambda/2r_i)/r_i^2$

$A_6=2\{3+(\lambda^2+4\kappa^2)/r_i^2-\kappa^2(4\lambda^2-3\kappa^2)/r_i^4\}$

$A_8=-4(1-\lambda/2r_i)-(1+\lambda/2r_i)(\lambda^2+4\kappa^2)/r_i^2$ ，$A_9=1-\lambda/r_i$

$\lambda=(R_2-R_1)/m$ ，$\omega=\alpha/n$ ，$\kappa=\lambda/\omega$ ，r_i；中心Oより格点(i,j)までの距離 ，p；垂直荷重

$D=E_p h_p^3/12(1-\nu^2)$；板剛度 ，E_p；板のヤング率 ，h_p；板厚 ，ν；ポアッソン比

式(1)を扇形平板のすべての格点においてたて、その際含まれる板外の仮想格点と同数の境界条件式とを連立させて解けば所要の未知数$w_{i,j}$が求まり、得られた結果を板の諸断面力とたわみwの関係式に代入することによってすべての格点における断面力が容易に計算されることになる。

(2) 境界条件式　　(i) 円弧辺の境界条件式

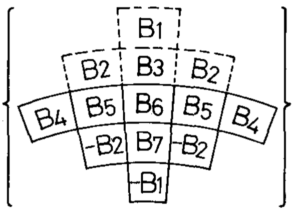
本題の扇形平板は円弧辺AC，BDにおいて曲りばりにより弾性支持されているから、これらの端辺において、板に作用するr方向板反力V_rおよびr方向曲げモーメントM_rと等大逆向きの力およびモーメントが弾性支持ばりに伝達されることとなり、このことおよび垂直荷重$g(\theta)$およびねじりモーメント$m(\theta)$の作用を受ける円形曲りばりの基礎式とから次の境界条件式を得る。

$$\frac{d^4w}{d\theta^4}+R(1+\mu_0)\frac{d^3w}{dr\,d\theta^2}-\mu_0\frac{d^2w}{d\theta^2}-\frac{R^4}{E_0I_0}g(\theta)=0\ ,\ (1+\mu_0)\frac{d^2w}{d\theta^2}-\mu_0R\frac{d^3w}{dr\,d\theta^2}+R\frac{dw}{dr}-\frac{R^3}{E_0I_0}m(\theta)=0\quad\cdots(2)$$

ここに、$g(\theta)=(V_r)_{r=R_1}$ および $g(\theta)=-(V_r)_{r=R_2}$ ；$m(\theta)=-(M_r)_{r=R_1}$ および $m(\theta)=(M_r)_{r=R_2}$

R：曲りばりの半径，$\mu_0=G_0C_0/E_0I_0$ ，$G_0C_0\cdot E_0I_0$：曲りばりのねじり剛性および曲げ剛性

いま外側円弧辺上の格点(i,j)において式(2)を差分化すれば次式を得る。



$w=0$ ---(3)

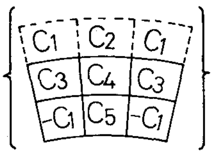
ここに $B_1=-r_i^4/2$, $B_2=r_iK^2[(H_0+J_0)\lambda-(2-\nu)r_i]/2$, $B_4=H_0K^4$

$B_3=-(H_0+J_0)r_i\lambda K^2+r_i^2\{r_i^2-\lambda r_i+\lambda^2/2+(2-\nu)K^2\}$

$B_5=K^2[(3-\nu)r_i\lambda-4H_0K^2-J_0\lambda^2]$

$B_6=2[3H_0K^4+K^2\lambda^2J_0+r_i\lambda\{r_i^2-(3-\nu)K^2\}]$

$B_7=(H_0+J_0)r_i\lambda K^2-r_i^2\{r_i^2+r_i\lambda+\lambda^2/2+(2-\nu)K^2\}$



$w=0$ -----(4)

$C_1=-r_iJ_0/2\lambda\omega^2$, $C_3=(H_0+J_0)/\omega^2+\nu r_i/\lambda\omega^2$

$C_2=r_i(J_0/\omega^2+H_0/2)/\lambda+r_i^2(r_i/\lambda+\nu/2)/\lambda^2$

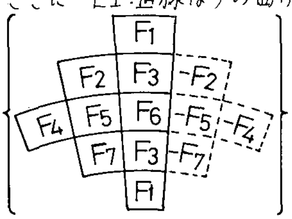
$C_4=-2[(H_0+J_0)/\omega^2+r_i^3/\lambda^3+\nu r_i/\lambda\omega^2]$, $H_0=E_0I_0/D\lambda$

$C_5=-r_i(J_0/\omega^2+H_0/2)/\lambda+r_i^2(r_i/\lambda-\nu/2)/\lambda^2$, $J_0=G_0C_0/D\lambda$

(ii) 直線辺の境界条件式　直線辺の境界条件式も(i)と同様、板と直線ばりとの間の応力および変形の連続条件より(5)式のごとく得られ、$\theta=\alpha$上の格点(i,j)において(5)式を差分化すれば式(6)(7)を得る.

$$\theta=0\text{で}\ \frac{\partial^4 w}{\partial r^4}=\frac{(V_\theta)_{\theta=0}}{EI},\ \frac{\partial}{\partial r}(\overline{\omega})=-\frac{(M_\theta)_{\theta=0}}{GC}\ ;\ \theta=\alpha\text{で}\ \frac{\partial^4 w}{\partial r^4}=-\frac{(V_\theta)_{\theta=\alpha}}{EI},\ \frac{\partial}{\partial r}(\overline{\omega})=\frac{(M_\theta)_{\theta=\alpha}}{GC}\quad\cdots\cdots(5)$$

ここに EI:直線ばりの曲げ剛性 , GC:直線ばりのねじり剛性 , $\overline{\omega}$:直線ばりのねじり率



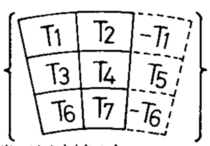
$w=0$ ---(6)

ここに $F_1=2HK/r_i$, $H=EI/D\lambda$, $F_2=K^2\{2-\nu-(1-2\nu)\lambda/2r_i\}/r_i^2$

$F_3=-8HK/r_i$, $F_4=K^4/r_i^4$, $F_6=12HK/r_i$

$F_5=-2K^2[K^2/r_i^2+2-\nu+(\nu-1)\lambda^2/r_i^2]/r_i^2$

$F_7=K^2\{2-\nu+(1-2\nu)/2r_i\}/r_i^2$



$w=0$ -----(7)

$T_1=J/\omega r_{i+1}$, $J=GC/D\lambda$, $T_2=-2(2\nu+\lambda/r_i)/\lambda$

$T_3=-(1/r_{i+1}+1/r_{i-1})J/\omega-4K^2/\lambda r_i^2$, $T_4=8(\nu+K^2/r_i^2)/\lambda$

$T_5=(1/r_{i+1}+1/r_{i-1})J/\omega-4K^2/\lambda r_i^2$, $T_6=J/\omega r_{i-1}$

$T_7=-2(2\nu-\lambda/r_i)/\lambda$

3. 数値計算例

図2に示すごとく周辺が直線ばりおよび円形曲りばりにて弾性支持され、かつ等分布荷重を満載する扇形平板のたわみ量、曲げモーメントを算出すれば図3～6に示すごとき結果を得る。

Case＼剛比	H, J	H_0, J_0
a	H=1.0 J=0.649	H_0=10.0 J_0=6.49
b	H=1.0 J=0.649	H_0=1.0 J_0=0.649
c	H=1.0 J=0.649	H_0=J_0=0

表1

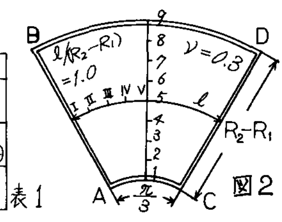


図2

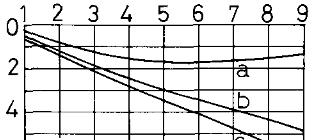


図3

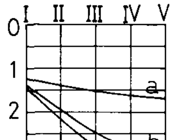


図4

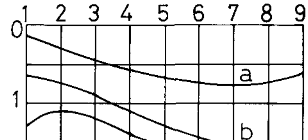


図5

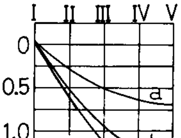


図6

4. 結　語

本手法により周辺がすべて弾性支持される扇形平板の解析が可能となるが、スティッフネスパラメータHおよびJについて極限計算をおこなえば、他の境界条件(単純支持, 自由, 固定)の板をも解くことができる点本法が極めて広範囲な解法であるといいうる。また本手法を応用して弾性支持ばりを介して接線方向および半径方向に連続な板の解析も可能であり、逐次発表の予定である。

参考文献　(1)金子・大塚;直線辺が弾性支持される扇形平板の解法, 九大工集, 第45巻第1号, 昭和47年1月