I－32　　骨組構造解析における相似律について

熊本大学　工学部　正員　三池亮次
同上　正員　秋吉卓
同上　学生員　○松本弘一

1．要　旨　骨組構造解析のように数式による現象表示が容易であるが、形状因子が複雑に関与する場合には、パイ定理による次元解析よりは、運動方程式そのものの無次元化によって、より適正な無次元積を誘導することができる。すでに、立体骨組構造の弾性基礎式をマトリックス表示し、その力学的性状を支配する無次元積を静的の場合について誘導し、2，3の興味ある問題を提起したが、ここでは同様の手法を動的の場合に拡張し、骨組構造の振動現象を規定する無次元積と相似律を検討する。

2．骨組構造の運動方程式の無次元表示

(a)．減衰強制振動の場合　変位を$\mathbb{d}$とし、速度$\dot{\mathbb{d}}$に比例する減衰力$\mathbb{C}$が存在し、外力が、

$$\mathbb{f}(t)=\mathbb{P}e^{i\Omega t} \tag{1}$$

で与えられる場合の、多自由度質点-バネ系の振動方程式は、一般に次式

$$\mathbb{M}\frac{d^2\mathbb{d}}{dt^2}+\mathbb{C}\frac{d\mathbb{d}}{dt}+\mathbb{K}\mathbb{d}=\mathbb{P}e^{i\Omega t} \tag{2}$$

で与えられる。ここに、$\mathbb{M}$，$\mathbb{K}$は質量および剛性マトリックスであり，$\mathbb{P}$，Ωは外力の振幅および角速度、tは時間である。任意の節点における変位$\mathbb{d}$と$\mathbb{f}(t)$の中に回転変位ϕとモーメントMを含むとき、$\mathbb{d}$および$\mathbb{f}(t)$または$\mathbb{P}$の次元を合わせるために、マトリックス$\mathbb{L}$を用い，

$$\mathbb{d}=l_0\mathbb{L}\mathbb{d}',\quad \mathbb{P}'=\mathbb{L}\mathbb{P}\qquad \mathbb{L}=diag[\mathbb{L}_i]\qquad \mathbb{L}_i=\left[\begin{array}{c:c} \mathbb{I} & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix}\frac{1}{l_0} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{l_0}\end{matrix}\end{array}\right]$$

$$\mathbb{M}'=l_0\mathbb{L}\mathbb{M}\mathbb{L},\quad \mathbb{C}'=l_0\mathbb{L}\mathbb{C}\mathbb{L},\quad \mathbb{K}'=l_0\mathbb{L}\mathbb{K}\mathbb{L}$$

とすれば、振動方程式は，

$$\mathbb{M}'\frac{d^2\mathbb{d}'}{dt^2}+\mathbb{C}'\frac{d\mathbb{d}'}{dt}+\mathbb{K}'\mathbb{d}'=\mathbb{P}'e^{i\Omega t} \tag{3}$$

$$\therefore\ \frac{E_0A_0}{P_0}\left\{\frac{\Omega_0^2\mathbb{M}'}{E_0A_0}\cdot\frac{d^2\mathbb{d}'}{d(\Omega_0t)^2}+\frac{\Omega_0\mathbb{C}'}{E_0A_0}\cdot\frac{d\mathbb{d}'}{d(\Omega_0t)}+\frac{\mathbb{K}'}{E_0A_0}\mathbb{d}'\right\}=\frac{\mathbb{P}'}{P_0}e^{i\frac{\Omega}{\Omega_0}\Omega_0t} \tag{4}$$

ここに，l_0，A_0，E_0は，基準部材の長さ、断面積，弾性係数、P_0は基準外荷重であり，無次元積

$$\mathbb{M}^*=\frac{\Omega_0^2\mathbb{M}'}{E_0A_0},\quad \mathbb{C}^*=\frac{\Omega_0\mathbb{C}'}{E_0A_0},\quad \mathbb{K}^*=\frac{\mathbb{K}'}{E_0A_0},\quad \mathbb{d}^*=\frac{E_0A_0}{P_0}\mathbb{d}',\quad \Omega^*=\frac{\Omega}{\Omega_0},\quad t^*=\Omega_0t$$

を定義すれば、次の，無次元振動方程式を得るであろう。ここにΩ_0は時間の逆数の次元をもつ。

$$\mathbb{M}^*\frac{d^2\mathbb{d}^*}{dt^{*2}}+\mathbb{C}^*\frac{d\mathbb{d}^*}{dt^*}+\mathbb{K}^*\mathbb{d}^*=\mathbb{P}^*e^{i\Omega^*t^*} \tag{5}$$

(1)、$\mathbb{K}^*$ について — (5)式において、$\Omega=0$ の場合が、静的弾性基礎式であり、無次元剛性マトリックス $\mathbb{K}^*$ が、基準部材の細長比 λ_0，基準部材に対する剛比 K ，長さ比 k_L，断面積比 k_A，弾性係数比 k_E などで表わされることについては、すでに報告のとおりである。

(2)、$\mathbb{M}^*$ について — 質量マトリックス $\mathbb{M}$ のうち、任意部材端における質量マトリックスを $\overline{\mathbb{M}}$ とすれば、$\overline{\mathbb{M}}\equiv\rho A\ell\,\overline{\mathbb{M}}'$ （ρ：部材の密度、A：部材断面積、ℓ：部材長）であり、

$$\mathbb{M}^*=\frac{\Omega_0^2}{E_0A_0}\cdot\ell_0\mathbb{L}_i\cdot\rho A\ell\cdot\overline{\mathbb{M}}'\cdot\mathbb{L}_i$$

$$=\Omega_0^2\cdot\left(\frac{\rho_0\ell_0^2}{E_0}\right)\cdot\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{A}{A_0}\cdot\frac{\ell}{\ell_0}\cdot(\mathbb{L}_i\overline{\mathbb{M}}'\mathbb{L}_i)=\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\frac{A}{A_0}\cdot\frac{\ell}{\ell_0}\cdot\mathbb{L}_i\overline{\mathbb{M}}'\mathbb{L}_i \tag{6}$$

ただし、

$$1/\Omega_0=\ell_0\Big/\sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}\equiv\frac{\ell_0}{V_0}\ ,\quad V_0=\sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}} \tag{7}$$

であり、このような Ω_0 を用いれば、$\mathbb{M}^*$ を規定する無次元積は、k_A，k_L，$\mathbb{L}_i\overline{\mathbb{M}}'\mathbb{L}_i$ の中に含まれる細長比 λ および、基準密度 ρ_0 に対する密度比 k_ρ であることが考察されよう。

(3)、$\mathbb{C}^*$ について — 減衰が、簡単な粘性減衰、構造減衰、履歴減衰等の何れの形式に従うかの如何にかかわらず、

$$\mathbb{C}^*=\frac{\Omega_0\ell_0}{E_0A_0}(\mathbb{L}\mathbb{C}\mathbb{L})=\frac{1}{A_0\sqrt{\rho_0E_0}}(\mathbb{L}\mathbb{C}\mathbb{L}) \tag{8}$$

の形をとる。

(4)、Ω^* について —

$$\Omega^*=\frac{\Omega}{\Omega_0}=\frac{\Omega\ell_0}{V_0} \tag{9}$$

は、一種のストローハル数であり、V_0 は速度の次元をもち、弾性体を伝わる実体波の速度を与える。

(5)、$\mathbb{d}^*$，$\mathbb{t}^*$ について — 変位の無次元積としては、静的の場合と同じく

$$u^*=\frac{E_0A_0}{P_0}\cdot\frac{u}{\ell_0}\ ,\quad \phi^*=\frac{E_0A_0}{P_0}\phi\quad(u\text{は変位、}\phi\text{は回転変位}) \tag{10}$$

である。また、時間の無次元積は

$$\mathbb{t}^*=\Omega_0t=\frac{V_0t}{\ell_0} \tag{11}$$

である。

(6)、減衰強制振動の相似律 — (5)式において、実物 p と模型 m に対して、同一の $\mathbb{M}^*$，$\mathbb{C}^*$，$\mathbb{K}^*$，$\mathbb{P}^*$ を与え、かつ

$$\left(\frac{\Omega\ell_0}{V_0}\right)_p=\left(\frac{\Omega\ell_0}{V_0}\right)_m\ ,\quad\left(\frac{V_0t}{\ell_0}\right)_p=\left(\frac{V_0t}{\ell_0}\right)_m \tag{12}$$

となるように、強制振動を与えれば、(5)式により、まったく同じ $\mathbb{d}^*$ を得るはずであり、

$$\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\frac{u}{\ell_0}\right)_p=\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\frac{u}{\ell_0}\right)_m\ ,\quad\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\phi\right)_p=\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\phi\right)_m \tag{13}$$

なお、速度 v，加速度 a の相似律は、(5)式左辺第2項、第1項より

$$\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\frac{v}{V_0}\right)_p=\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\frac{v}{V_0}\right)_m\ ,\quad\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\frac{\ell_0a}{V_0^2}\right)_p=\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\frac{\ell_0a}{V_0^2}\right)_m \tag{14}$$

である。

(b)、自由振動の場合　　(5)式において　$\mathbb{C}^*=0$ ，$\mathbb{P}^*=0$ とおけば、同様無次元積を得る。

参考文献：三池亮次，松本弘一 "トラス部材の細長比に関する考察(第2報)" 土木学会第26回年次学術講演会 S.46.10

福井武弘，三池亮次，右田泰弘 "立体骨組構造物の力学的相似条件について" 土木学会第25回年次学術講演会 S.45.11