I－31　　一本柱フラットスラブ構造の柱座屈について

九州大学　正会員　櫻木　武
〃　学生員　○井福周介
長崎大学　正会員　高橋和雄

1. 緒言　フラットスラブ構造には，一方向座屈，二方向座屈，せん断座屈および柱座屈の各座屈形式が考えられるが，これらのうち一方向座屈と二方向座屈についてはすでに報告した[1,2]。つづいて著者らは，種々の座屈形式の中で重要と思われる柱座屈について研究を進めるものであるが，本文はその第1報として，1本柱フラットスラブの柱直上に集中力が作用するごとき状態の座屈安定問題を論ずるものである。

2. 解法　図1.に示すように，任意境界を有する矩形板が，中間にて1本の柱で支えられるものとし，柱の位置を$(\xi_1 a, \eta_1 b)$とする。柱の直上に垂直集中荷重Pが作用する場合には，Pはそのまま柱に伝達されるが，座屈時に柱の曲げ変形が生ずるので，これにともなって板の曲げ変形が誘起されることになる。換言すれば，荷重Pによる柱の座屈変形は柱頭部において板の曲げ抵抗を受けることになる。そこで本題の座屈問題を解析するには，板の曲げ抵抗をバネ定数として換算のうえ，そのバネ定数を有する回転バネで拘束された柱の座屈問題とみなす。板のバネ定数は，著者らの1人が提案したフラットスラブ構造解析のための基本系法[3]により容易に算定することができる。すなわち，柱と板との間に伝達される垂直反力をV_{11}，xおよびy方向の反力モーメントをM_{11}^x，M_{11}^yとすれば，これらを求める為の基本連立方程式が次式で与えられる。（文献(3)参照）

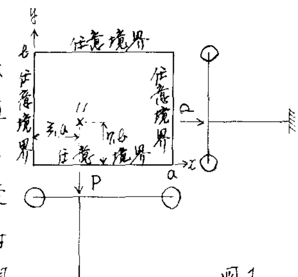

図1.

$$\begin{bmatrix} H_{11}^{11} & H_{11}^{x11} & H_{11}^{y11} \\ O_{11}^{11} & O_{11}^{x11} & O_{11}^{y11} \\ Q_{11}^{11} & Q_{11}^{x11} & Q_{11}^{y11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ -\frac{M_{11}^x}{a} \\ -\frac{M_{11}^y}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ab}{4}L_{11} - \frac{\mu D}{4a^2}d_{11} \\ \frac{ab}{4}L_{11}^x - \frac{\mu D}{4a}\theta_{11}^x \\ \frac{ab}{4}L_{11}^y - \frac{\mu^2 D}{4a}\theta_{11}^y \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (1)$$

（ただし，柱の垂直変位はないものとする。 $\therefore d_{11}=0$）

x方向の曲げに対するバネ定数を求める場合には，柱頭部にx方向の曲げモーメントを伝達しないようなローラー支承を挿入し，かかる柱で支えられるフラットスラブ構造に対して，柱直上の板に単位モーメントを荷重として加えるごとき力学系を想定すればよい。このとき，式(1)は次のように書き改められる。ここに，

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} H_{11}^{11} & H_{11}^{y11} \\ Q_{11}^{11} & Q_{11}^{y11} + \frac{\mu^3 D}{4}\Gamma_{11}^y \end{bmatrix} \qquad \mathbb{X} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ -\frac{M_{11}^y}{\mu a} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{L} = \frac{\mu a^2}{4}\begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{11}^y \end{bmatrix}$$

とすれば，$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X} = \mathbb{L}$ ……(2)　　ただし，$\Gamma_{11}^y = -\theta_{11}^y / M_{11}^y$（既往たわみ角式より算定）

また，L_{11}およびL_{11}^xは，フラットスラブ構造から中間柱を取り除いて得られる基本板において，柱位置に相当する点11にx方向の単位モーメントが作用したときの，点11のたわみおよびたわみ角を，それぞれ，$\frac{\Delta}{D}$倍，$\frac{\mu D}{a^2}$倍したものである。式(2)から，$\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{L}$　が与えられ，この式を式(1)に代入すれば，フラットスラブにおける柱直上の点11のx方向のたわみ角θ_{11}^xが算定され，次のとおりである。

$$\begin{bmatrix} O_{11}^{11} & O_{11}^{y11} \end{bmatrix}\cdot\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{L} = \frac{\mu a^2}{4}L_{11}^x - \frac{\mu D}{4a}\theta_{11}^x \qquad \therefore\ \theta_{11}^x = \frac{4a}{\mu D}\left\{\frac{\mu a^2}{4}L_{11}^x - \begin{bmatrix} O_{11}^{11} & O_{11}^{y11} \end{bmatrix}\cdot\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{L}\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

よって，求めんとするx方向のバネ定数k_{11}^xが，

$$k_{11}^x = 1/\theta_{11}^x = \frac{\mu D}{4a}\Big/\left\{\frac{\mu a^2}{4}L_{11}^x - \begin{bmatrix} O_{11}^{11} & O_{11}^{y11} \end{bmatrix}\cdot\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{L}\right\} \quad \cdots\cdots (4)$$

のように決定されることになる。全く同様にして，柱頭部にy方向の曲げモーメントを伝達しない

ようなローラー支承を挿入し，かゝる柱で支えられるフラットスラブ構造において，柱直上にy方向の単位モーメントをかけ，その位置のたわみ角を式(1)から算定することにより，y方向のバネ定数k^y_{11}を求めることができる。 $k^y_{11} = 1/\theta^y_{11} = \frac{\mu a^2}{4a} \Big/ \left\{\frac{\mu a^2}{4} L^y_{11} - [Q_{11}\ \ Q^{x''}_{11}]\cdot A^{-1}\cdot L\right\}$ ---------(5)

こゝに， $L = \frac{\mu a^2}{4}\begin{bmatrix} L_{11} \\ L^x_{11} \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} H_{11} & H^{x''}_{11} \\ O_{11} & O^{x''}_{11} + \frac{\mu a}{4}\Gamma^x_{11} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} T_{11} \\ -\frac{M^x_{11}}{a} \end{bmatrix}$ ただし，$\Gamma^x_{11} = -\theta^x_{11}/M^x_{11}$

任意方向の曲げに対するバネ定数は，上記のxおよびy方向のバネ定数を用いて算定することができる。すなわち，求めんとする方向に単位モーメントM=1を作用させれば，それらはxおよびy方向のモーメント成分に分けることができ，$\cos\gamma$，$\sin\gamma$で与えられる。（図2．参照）これら，モーメント成分を個々に作用させたときの柱直上の板のxおよびy方向の回転角$(\theta^x_{11})_c$，$(\theta^y_{11})_c$ および，$(\theta^x_{11})_s$，$(\theta^y_{11})_s$ は式(1)から容易に求めることができ，その結果から，

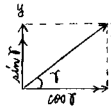

図2.

$$\begin{bmatrix} (\theta^x_{11})_c + (\theta^x_{11})_s \\ (\theta^y_{11})_c + (\theta^y_{11})_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\theta^x_{11})_x & (\theta^x_{11})_y \\ (\theta^y_{11})_x & (\theta^y_{11})_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{bmatrix}$$

こゝに，$(\theta^x_{11})_x$，$(\theta^y_{11})_x$；柱直上にx方向の単位モーメントを作用させたときのxおよびy方向柱位置における板のたわみ角である。

$(\theta^x_{11})_y$，$(\theta^y_{11})_y$；柱直上にy方向の単位モーメントを作用させたときのxおよびy方向柱位置における板のたわみ角である。

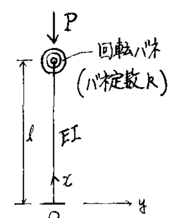

図3.

を得る。よって，最初に与えられた単位モーメント方向の回転角θ_{11}が，

$$\theta_{11} = [\cos\gamma\ \ \sin\gamma]\begin{bmatrix} (\theta^x_{11})_c + (\theta^x_{11})_s \\ (\theta^y_{11})_c + (\theta^y_{11})_s \end{bmatrix} = [\cos\gamma\ \ \sin\gamma]\begin{bmatrix} (\theta^x_{11})_x & (\theta^x_{11})_y \\ (\theta^y_{11})_x & (\theta^y_{11})_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{bmatrix} \quad \text{---------(6)}$$

のように得られ，これよりバネ定数k_{11}が，$k_{11} = 1/\theta_{11}$ のように求められることになる。 バネ定数が決定されれば，座屈荷重は図3．の状態を解析することにより算定される。すなわち，柱の曲げ抵抗に関する基礎微分方程式 $\frac{d^4y}{dx^4} + \lambda^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ （ただし，$\lambda^2 = P/EI$） より，たわみyを求め境界条件として，

$x = 0$で $\begin{cases} \text{(固定)} & y = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0 \\ \text{(ヒンジ)} & y = 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \end{cases}$， $x = l$で $y = 0$，$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{k}{EI}\frac{dy}{dx}$

を用いれば，本題の固有値方程式が次のように与えられることになる。

$$\left.\begin{aligned} kl/EI &= \{\lambda l \sin\lambda l - (\lambda l)^2\cos\lambda l\} \big/ \{2(1-\cos\lambda l) - \lambda l \sin\lambda l\} && \text{(固定)} \\ kl/EI &= (\lambda l)^2 \sin\lambda l \big/ \{\lambda l \cos\lambda l - \sin\lambda l\} && \text{(ヒンジ)} \end{aligned}\right\} \quad \text{-------(7)}$$

フラットスラブ構造の座屈荷重の算定において，バネ定数としての板の曲げ抵抗と柱の曲げ剛性の大小により，柱の曲げ変形の方向が定められなければならないが，これを理論的に求めることは，甚々困難である。しかし，任意方向のバネ定数は式(6)より比較的容易に求めることができ，また柱の固有値もバネ定数が定められれば，式(7)より極めて簡単に計算できるから，実際演算上は座屈方向として適当に種々の方向を想定し，それらに対応する座屈荷重を算定のうえ，その最小値を数値的に求めれば本題のフラットスラブ構造の座屈荷重を求めることが可能になる。

（参考文献） (1) T. Chiyaki ; One-Way Buckling of Flat Slabs Supported by Flexural Columns Proc. of the 19th Jap. Nat. for Appl. Mech. 1969, 12, 1970

(2) 藤川正美；無梁板構造の二方向座屈に関する研究（卒論．1971.）

(3) 樗木武；無梁板構造の解法に関する研究（学位論文．1970.）