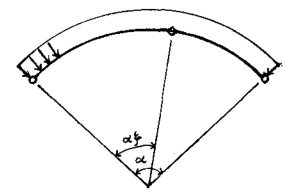
I－29　　３ヒンジ円弧アーチの座屈について

長崎大学　正員　崎山毅

１．まえがき

任意位置に中間ヒンジをもつ３ヒンジアーチについて、円形等分布荷重に対する面内座屈性状を解析し、中間ヒンジ位置，中心角の大きさ、アーチ部材の細長比などに関する特性を得た。中間ヒンジが中央断面から離れた位置にある３ヒンジアーチにおいては構造の対称性が失われ、これに起因して、対称構造の場合には存在しなかった、新たな固有値が発生する。そして、非対称構造の３ヒンジアーチの危険荷重はこの新たな固有値によって与えられる。

２．座屈方程式および境界条件



アーチ部材の曲げ剛性，断面積，部材長および中心角をEI, A, L およびαとし、半径方向と接線方向の変位および荷重強度 u, w および p, q で表わせば、３ヒンジ円弧アーチの面内座屈は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d^4u}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2u}{d\eta^2}+\alpha^2a^2u\right)+\alpha\left[\frac{d^3w}{d\eta^3}+(k^2-a^2)\frac{dw}{d\eta}\right]-\frac{pL^4}{EI}=0\\&\alpha\left(\frac{d^3u}{d\eta^3}-a^2\frac{du}{d\eta}\right)+(\alpha^2+a^2)\frac{d^2w}{d\eta^2}=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ただし、$k^2=pL^3/EI$, $a^2=AL^2/I$, $\eta=\varphi/\alpha$，φ：極座標

座屈方程式(1)の解を単位階段関数 $\bar{u}(\eta-\xi)$ を用いて次の形で求める。ξは中間ヒンジ位置を表わす。

$$u(\eta)=u_1(\eta)+u_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\xi)\quad,\quad w(\eta)=w_1(\eta)+w_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\xi)$$

このとき，たわみ角$\theta(\eta)$、曲げモーメント$M(\eta)$、軸力$N(\eta)$およびせん断力$Q(\eta)$は

$$\theta(\eta)=\theta_1(\eta)+\theta_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\xi)\quad,\quad M(\eta)=M_1(\eta)+M_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\xi)$$

$$N(\eta)=N_1(\eta)+N_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\xi)\quad,\quad Q(\eta)=Q_1(\eta)+Q_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\xi)$$

また、３ヒンジアーチの境界条件は

$u_1(0)=0$　(2・a)，$w_1(0)=0$　(2・b)，$M_1(0)=0$　(2・c)，$u_1(1)+u_2(1)=0$　(2・d)，$w_1(1)+w_2(1)=0$　(2・e)，$M_1(1)+M_2(1)=0$　(2・f)

３．中間ヒンジ部の条件

中間ヒンジ部 $\eta=\xi$ におけるたわみの連続条件は　$u_2(\xi)=0$　(3・a)，$w_2(\xi)=0$　(3・b)

また、曲げモーメントの値はゼロであるから　$M_1(\xi)=0$　(3・c)，$M_2(\xi)=0$　(3・d)

軸力およびせん断力に関する条件は　$N_2(\xi)-\theta_2(\xi)\cdot Q_1(\xi)=0$　(3・e)　$Q_2(\xi)+\theta_2(\xi)\cdot N_1(\xi)=0$　(3・f)

４．座屈方程式の解

条件(2・a)，(2・b)，(2・c)，(3a)，(3・b)，(3・d) を考慮すれば、関数 $\bar{u}_1(\eta)$, $\bar{w}_1(\eta)$, $\bar{M}_1(\eta)$, $\bar{N}_1(\eta)$, $\bar{Q}_1(\eta)$ $\bar{u}_2(\eta)$, $\bar{w}_2(\eta)$, $\bar{M}_2(\eta)$ は次のようになる。

$$\bar{u}_1(\eta)=u_{11}(\eta)\cdot\theta_1(0)+u_{12}(\eta)\cdot\bar{N}_1(0)+u_{13}(\eta)\cdot\bar{Q}_1(0)-u_{14}(\eta)\frac{pL^3}{EI}\ ,\ \bar{w}_1(\eta)=w_{11}(\eta)\cdot\theta_1(0)+w_{12}(\eta)\cdot\bar{M}(0)+w_{13}(\eta)\bar{Q}_1(0)-w_{14}(\eta)\frac{pL^3}{EI}$$

$$\bar{M}_1(\eta)=m_{12}(\eta)\cdot\bar{N}_1(0)+m_{13}(\eta)\cdot\bar{Q}_1(0)-m_{14}(\eta)\frac{pL^3}{EI}\ ,\ \bar{N}_1(\eta)=n_{12}(\eta)\cdot\bar{N}_1(0)+n_{13}(\eta)\cdot\bar{Q}_1(0)-n_{14}(\eta)\cdot\frac{pL^3}{EI}$$

$$\bar{Q}_1(\eta)=q_{12}(\eta)\cdot\bar{N}_1(0)+q_{13}(\eta)\cdot\bar{Q}_1(0)-q_{14}(\eta)\frac{pL^3}{EI}\ ,\ \bar{u}_2(\eta)=\bar{U}_{11}(\eta)\cdot\theta_2(\xi)+\bar{U}_{12}(\eta)\cdot\bar{N}_2(\xi)+\bar{U}_{13}(\eta)\cdot\bar{Q}_2(\xi)$$

$$\bar{w}_2(\eta)=\bar{W}_{11}(\eta)\cdot\theta_2(\xi)+\bar{W}_{12}(\eta)\cdot\bar{N}_2(\xi)+\bar{W}_{13}(\eta)\cdot\bar{Q}_2(\xi),\ \bar{M}_2(\eta)=M_{12}(\eta)\cdot\bar{N}_2(\xi)+M_{13}(\eta)\cdot\bar{Q}_2(\xi)$$

ただし，$u_{11}(\eta)=\sin\alpha\eta/\alpha$，$u_{12}(\eta)=-\left[\beta^2(\alpha^2+a^2-k^2)\cos\alpha\eta-\alpha^2(\alpha^2+a^2)\cos\beta\eta+k^2(k^2-a^2)\right]/(\alpha\beta^2k^2a^2)$

$u_{13}(\eta)=(\alpha^2+a^2)(\beta\sin\alpha\eta-\alpha\sin\beta\eta)/(\alpha\beta a^2k^2)$, $u_{14}(\eta)=(\alpha^2+a^2)(\beta^2\cos\alpha\eta-\alpha^2\cos\beta\eta-k^2)/(\alpha^2\beta^2a^2k^2)$

$w_{11}(\eta)=(1-\cos\alpha\eta)/\alpha$, $w_{12}(\eta)=-[\beta^2(\alpha^2+a^2-k^2)\sin\alpha\eta-\alpha^3(\beta^2+a^2)\sin\beta\eta/\beta-\alpha a^2k^2\eta]/(\alpha\beta^2k^2a^2)$

$w_{13}(\eta)=[\alpha^2(\beta^2+a^2)\cos\beta\eta/\beta-\beta(\alpha^2+a^2)\cos\alpha\eta+a^2k^2/\beta]/(\alpha\beta a^2k^2)$, $w_{14}(\eta)=[(\alpha^2+a^2)\beta^3\sin\alpha\eta-\alpha^3(\beta^2+a^2)\sin\beta\eta-\alpha\beta a^2k^2\cdot\eta]/(\alpha^2\beta^3a^2k^2)$

$m_{12}(\eta)=\alpha(\cos\beta\eta-1)/\beta^2$, $m_{13}(\eta)=-\sin\beta\eta/\beta$, $m_{14}(\eta)=(1-\cos\beta\eta)/\beta^2$, $n_{12}(\eta)=(\alpha^2\cos\beta\eta+k^2)/\beta^2$

$n_{13}(\eta)=-\alpha\sin\beta\eta/\beta$, $n_{14}(\eta)=\alpha(1-\cos\beta\eta)/\beta^2$, $g_{12}(\eta)=\alpha\sin\beta\eta/\beta$, $g_{13}(\eta)=\cos\beta\eta$, $g_{14}(\eta)=-\sin\beta\eta/\beta$

$\overline{U}_{11}(\eta)=\sin\alpha(\eta-\varphi)/\alpha$, $\overline{U}_{12}(\eta)=-[\beta^2(\alpha^2+a^2-k^2)\cos\alpha(\eta-\varphi)-\alpha^2(\alpha^2+a^2)\cos\beta(\eta-\varphi)+k^2(k^2-a^2)]/(\alpha\beta^2k^2a^2)$

$\overline{U}_{13}(\eta)=(\alpha^2+a^2)[\beta\sin\alpha(\eta-\varphi)-\alpha\sin\beta(\eta-\varphi)]/(\alpha\beta a^2k^2)$, $\overline{W}_{11}(\eta)=[1-\cos\alpha(\eta-\varphi)]/\alpha$, $\beta^2=\alpha^2+k^2$

$\overline{W}_{12}(\eta)=-[\beta^2(\alpha^2+a^2-k^2)\sin\alpha(\eta-\varphi)-\alpha^3(\beta^2+a^2)\sin\beta(\eta-\varphi)/\beta-\alpha a^2k^2(\eta-\varphi)]/(\alpha\beta^2k^2a^2)$

$\overline{W}_{13}(\eta)=[\alpha^2(\beta^2+a^2)\cos\beta(\eta-\varphi)-\beta^2\cos\alpha(\eta-\varphi)+a^2k^2]/(\alpha\beta^2a^2k^2)$, $M_{12}(\eta)=\alpha[\cos\beta(\eta-\varphi)-1]/\beta^2$, $M_{13}(\eta)=-\sin\beta(\eta-\varphi)/\beta$

5、座屈条件式

条件式(2·d),(2·e),(2·f),(3·a),(3·e),(3·f)から定数 $\theta_1(0)$, $\overline{N}_1(0)$, $\overline{Q}_1(0)$, $\theta_2(\varphi)$, $\overline{N}_2(\varphi)$, $\overline{Q}_2(\varphi)$ を決定する次式がえられる。

$$\begin{bmatrix} u_{11}(1) & u_{12}(1) & u_{13}(1) & \overline{U}_{11}(1) & \overline{U}_{12}(1) & \overline{U}_{13}(1) \\ w_{11}(1) & w_{12}(1) & w_{13}(1) & \overline{W}_{11}(1) & \overline{W}_{12}(1) & \overline{W}_{13}(1) \\ 0 & m_{12}(1) & m_{13}(1) & 0 & M_{12}(1) & M_{13}(1) \\ 0 & m_{12}(\varphi) & m_{13}(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_1(\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{N}_1(\varphi) & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1(0) \\ \overline{N}_1(0) \\ \overline{Q}_1(0) \\ \theta_2(\varphi) \\ \overline{N}_2(\varphi) \\ \overline{Q}_2(\varphi) \end{bmatrix} = \frac{pL^3}{EI} \begin{bmatrix} u_{14}(1) \\ w_{14}(1) \\ m_{14}(1) \\ m_{14}(\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ただし

$\overline{u}(\eta)=u(\eta)/L$, $w(\eta)=w(\eta)/L$

$\overline{M}(\eta)=L\cdot M(\eta)/EI$

$\overline{N}(\eta)=L^2N(\eta)/EI$

$\overline{Q}(\eta)=-L^2Q(\eta)/EI$

$\overline{N}_1(\varphi)$ および $\overline{Q}_1(\varphi)$ は次式よりえられる。

$$\begin{cases} \delta_0[\overline{N}_1(\varphi)]^2+\varepsilon_0[\overline{N}_1(\varphi)][\overline{Q}_1(\varphi)]+\varsigma_1[\overline{N}_1(\varphi)]+\varsigma_2[\overline{Q}_1(\varphi)]+\varsigma_3=0 \\ \varepsilon_0[\overline{Q}_1(\varphi)]^2+\delta_0[\overline{N}_1(\varphi)][\overline{Q}_1(\varphi)]+\varsigma_4[\overline{N}_1(\varphi)]+\varsigma_5[\overline{Q}_1(\varphi)]=0 \end{cases}$$

ただし $\delta_0=\cos\frac{\beta\varphi}{2}\cos\frac{\beta(1-\varphi)}{2}\left[-\frac{\beta(\alpha^2+a^2-k^2)}{k^2a^2}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2\beta}\cos\frac{\alpha}{2}\right]+\frac{\alpha}{a^2k^2}\sin\frac{\beta}{2}\left[(\alpha^2+a^2)\sin\frac{\alpha\varphi}{2}\sin\frac{\alpha(1-\varphi)}{2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}(\beta^2+a^2)\cos\frac{\alpha}{2}\right]$

$\varepsilon_0=\frac{\alpha(\alpha^2+a^2-k^2)}{a^2k^2}\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta\varphi}{2}\sin\frac{\beta(1-\varphi)}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha\varphi}{2}\sin\frac{\alpha(1-\varphi)}{2}\right]+\frac{\alpha^2}{2\beta^2}\cos\frac{\alpha}{2}\left[(1-\varphi)\sin\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\beta\varphi}{2}\sin\frac{\beta(1-\varphi)}{2}\right]$

$\gamma_0=\alpha\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha\varphi}{2}\sin\frac{\beta(1-\varphi)}{2}$, $\varsigma_1=k^2\delta_0+\gamma_0-\frac{\beta k^2}{a^2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta\varphi}{2}\cos\frac{\beta(1-\varphi)}{2}$, $\varsigma_2=k^2\varepsilon_0+\frac{\alpha k^2}{a^2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta\varphi}{2}\sin\frac{\beta(1-\varphi)}{2}$

$\varsigma_3=k^2\gamma_0$, $\varsigma_4=-\frac{\alpha k^2}{a^2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta\varphi}{2}\cos\frac{\beta(1-\varphi)}{2}$, $\varsigma_5=\gamma_0+\frac{\alpha^2k^2}{\beta a^2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta\varphi}{2}\sin\frac{\beta(1-\varphi)}{2}$

上記の6元連立方程式の係数行列式がゼロになるとき3ヒンジアーチには無限大のたわみが生じることになり、これより次の座屈条件式がえられる。

$$2\gamma_0-\varsigma_1+\frac{\alpha}{\beta}(k^2\varepsilon_0-\varsigma_2)\tan\frac{\beta\varphi}{2}+\sqrt{\sigma}=0$$

$$2\gamma_0-\varsigma_1+\frac{\alpha}{\beta}(k^2\varepsilon_0-\varsigma_2)\tan\frac{\beta\varphi}{2}-\sqrt{\sigma}=0$$

ただし $\sigma=\left[\varsigma_1+\frac{\alpha}{\beta}(k^2\varepsilon_0+\varsigma_2)\tan\frac{\beta\varphi}{2}\right]^2-4\left(\delta_0+\frac{\alpha}{\beta}\varepsilon_0\tan\frac{\beta\varphi}{2}\right)\left(\varsigma_3+\frac{\alpha}{\beta}k^2\varsigma_2\tan\frac{\beta\varphi}{2}\right)$

2個の座屈条件式に対応する $\overline{N}_1(\varphi)$ はそれぞれ次のとおりである。

$$\overline{N}_1(\varphi)=\left\{-\left[\varsigma_1+\frac{\alpha}{\beta}(k^2\varepsilon_0+\varsigma_2)\tan\frac{\beta\varphi}{2}\right]+\sqrt{\sigma}\right\}\Big/\left\{2\left(\delta_0+\frac{\alpha}{\beta}\varepsilon_0\tan\frac{\beta\varphi}{2}\right)\right\}$$

$$\overline{N}_1(\varphi)=\left\{-\left[\varsigma_1+\frac{\alpha}{\beta}(k^2\varepsilon_0+\varsigma_2)\tan\frac{\beta\varphi}{2}\right]-\sqrt{\sigma}\right\}\Big/\left\{2\left(\delta_0+\frac{\alpha}{\beta}\varepsilon_0\tan\frac{\beta\varphi}{2}\right)\right\}$$

6、数値解析

数値解析の結果は講演当日発表する。

[参考文献] (1) A. Nasarow , Zur Frage der Knicksicherheit eines Bogens, BAUTECHNIK, 1935

(2) 崎山毅 , 集中荷重によるアーチの座屈について, 土木学会講演概要集, 1971