I－27　　ピン結トラスの部分構造による解法

熊本大学　工学部　　正員　　三池亮次
同　上　　学生員　　○石田寛生

1，要旨　　骨組構造を、幾つかの部分構造に分割し，その中の任意の部分構造の両側切断面における群状態ベクトルが、変形法基礎式から誘導される群遷移マトリックスによって、相互に連結されるものであることについては，すでに発表のとおりである。

ここでは、ピン結トラスにおいて，群遷移マトリックスを誘導する過程に生ずる特異の問題が，いかなるトラス骨組形状において生じ，また，それが発生する物理的意味と、それを除去するための手法について検討した。

2，遷移マトリックスの正則の条件

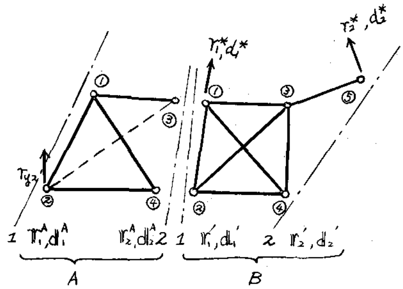

図-1　トラスの部分構造

任意の部分構造 B の切断面1に作用する外力を $\mathbb{P}_1^B$（切断面に作用する外力は、すべて1側の接点に作用するものとする。）変位を $\mathbf{d}_1$、反力を $\mathbf{r}_1$、切断面1，2の中間の構造節点に作用する外力を $\mathbb{P}_0^B$，変位を $\mathbf{d}_0^B$ とし，切断面2については添付2をつければ，剛性マトリックス $\mathbb{K}$ に対して

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{10} & \mathbb{K}_{12} \\ \mathbb{K}_{01} & \mathbb{K}_{00} & \mathbb{K}_{02} \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{20} & \mathbb{K}_{22} \end{pmatrix}^B \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}^B = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbb{0} \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}^B + \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_0 \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}^B \qquad (1)$$

(1)式の $\mathbf{d}_0$ を消去すれば

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (\mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{01})\mathbf{d}_1 + (\mathbb{K}_{12} - \mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02})\mathbf{d}_2 + (\mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{P}_0 - \mathbb{P}_1) \\ \mathbf{r}_2 &= (\mathbb{K}_{21} - \mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{01})\mathbf{d}_1 + (\mathbb{K}_{22} - \mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02})\mathbf{d}_2 + (\mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{P}_0) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

上式は，部分構造による解法の基礎式である。(2)式を変形すれば，（以上添付Bを省略）

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{K}_{12} - \mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02}) & \mathbb{0} \\ (\mathbb{K}_{22} - \mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02}) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{01}) & \mathbb{I} \\ -(\mathbb{K}_{21} - \mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{01}) & \mathbb{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{r}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{P}_0 - \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{P}_0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

上式の，状態ベクトル $\mathbb{S}_1^{(t)} = [\mathbf{d}_1,\ \mathbf{r}_1]$，$\mathbb{S}_2^{(t)} = [\mathbf{d}_2,\ \mathbf{r}_2]$ にかかる係数マトリックスを $\mathbb{G}_2$, $\mathbb{G}_1$ とすれば，

$$\mathbb{G}_2 \cdot \mathbb{S}_2 = \mathbb{G}_1 \cdot \mathbb{S}_1 + \mathbb{C}_1 \qquad (4)$$

であり，遷移マトリックス $\mathbb{G} = \mathbb{G}_2^{-1} \cdot \mathbb{G}_1$ が正則であるためには、$\mathbb{G}_2$ が正則であること，したがって，$\mathbb{K}_s = (\mathbb{K}_{12} - \mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02})$ が正則でなければならない。したがって，切断面1と2の節点数を等しくとることはもちろんであるが，以下に $\mathbb{K}_s$ の物理的意味を考察し $\mathbb{G}_2$ が特異となる一般的条件と，その理由を，明らかにしよう。

(3),(4)式において $\mathbb{C}_1 = \mathbb{0}$，$\mathbf{d}_1 = \mathbb{0}$ すなわち、部分構造に外力が作用しない構造物において，1端を固定の場合（$\mathbf{r}_2 \neq \mathbb{0}$ であってもよい。）

$$\mathbb{K}_S \cdot \mathbf{d}_2 = \mathbf{r}_1$$

を得るが、2端における変位$\mathbf{d}_2$より固定端1の断面力$\mathbf{r}_1$が得られても、$\mathbf{r}_1$より$\mathbf{d}_2$を一義的に決定することができないとき、すなわち、$\mathbf{d}_2$と$\mathbf{r}_1$が1対1に対応しない時、$\mathbb{K}_S$は特異となるであろう。

たとえば、図－1に示すトラス構造A、またはBの切断面1を固定するとき、

(1) 部分構造Bにおいて、切断面2の⑤節点の③,⑤部材軸に垂直方向の変位d_2^*の如何にかかわらず、切断面1の反力$\mathbf{r}_1 = 0$で、$\mathbb{K}_S$は特異となる。

(2) 部分構造Aの切断面2の変位$\mathbf{d}_2$の如何にかかわらず、切断面1の②節点における③④部材軸に垂直方向の反力$r_{y②} = 0$であり、$\mathbb{K}_S$は特異となる。

$r_{y②}$は、切断面それ自身の状態ベクトルに依存する例であり、(2)の場合の特異の問題を取り除くためには、②,③部材を追加する必要がある。

(1)の場合においては、部分構造Bの切断節点①,⑤の変位および反力を、おのおのA構造①－③部材B構造③－⑤部材軸およびそれに垂直方向にとり、そのうち垂直方向の反力、変位を、r_1^*, d_1^*; r_2^*, d_2^*とし、それ以外の切断面1，2における反力と変位を$\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{d}_1'$; $\mathbf{r}_2'$, $\mathbf{d}_2'$とすれば、部分構造Bの部分構造解析の基礎式は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1' \\ \mathbf{r}_2' \\ r_1^* \\ r_2^* \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbb{K}_e & \mathbf{k}_{e1}^* & \mathbb{O} \\ \hline \mathbf{k}_{1e}^* & k_{11}^* & 0 \\ \hline \mathbb{O} & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{d}_1' \\ \mathbf{d}_2' \\ \hline d_1^* \\ \hline d_2^* \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \mathbb{C}_1 \\ \mathbb{C}_2 \\ \hline C_1^* \\ \hline C_2^{*}(=0) \end{array}\right] \tag{5}$$

であり、次の条件が成立するであろう。

(1) d_2^*の変位は、反力$\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2'$, r_1^*, r_2^*, に、何らの影響も及ぼさない。したがって、d_2^*にかかる係数は、すべて零である。

(2) $\mathbf{d}_1'$, $\mathbf{d}_2'$, d_1^*, d_2^*の変位の如何にかかわらず、$r_2^* = 0$であるから、(5)式の係数行列第4行の要素は、すべて零である。また$C_2^* = 0$である。

(3) ①節点の反力$r_1^* = 0$である。

したがって、①，⑤節点において、部材軸に垂直方向の反力と変位r_2^*, d_2^*, およびC_2^*を取り除き、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_e \\ r_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_e & \mathbf{k}_{e1}^* \\ \mathbf{k}_{1e}^* & k_{11}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_e \\ d_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{C}_e \\ C_1^* \end{bmatrix} \tag{6}$$

ここに、$\mathbf{r}_e^{(t)} = [\,\mathbf{r}_1'^{(t)}, \mathbf{r}_2'^{(t)}\,]$, $\mathbf{d}_e^{(t)} = [\,\mathbf{d}_1'^{(t)}, \mathbf{d}_2'^{(t)}\,]$, $\mathbb{C}_e^{(t)} = [\,\mathbb{C}_1'^{(t)}, \mathbb{C}_2'^{(t)}\,]$, を、$r_1^* = 0$の条件の下に解き、$d_1^*$を消去すれば、次のように、部分構造解析の基礎式を得る。すなわち、

$$r_1^* = \mathbf{k}_{1e}^* \mathbf{d}_e + k_{11}^* d_1^* + C_1^*$$

$$\therefore \quad d_1^* = -\frac{1}{k_{11}^*}\{\mathbf{k}_{1e}^* \mathbf{d}_e + C_1^*\}$$

$$\therefore \quad \mathbf{r}_e = \left(\mathbb{K}_e - \frac{1}{k_{11}^*}\mathbf{k}_{e1}^* \cdot \mathbf{k}_{e1}^{*(t)}\right)\mathbf{d}_e + \left(\mathbb{C}_e - \frac{C_1^*}{k_{11}^*} \cdot \mathbf{k}_{e1}^*\right)$$

(5)式の求め方、および適用計算例は、講演時に述べるが、このように、マトリックスを圧縮する方法は、遷移マトリックス法のみでなく、(2)式を基礎式とする部分構造の解法にも、適用されるであろう

参考文献

吉村虎蔵，三池亀次，宮村重範，吉村健，"群遷移マトリックスによる骨組構造解析"
土木学会第25回年次学術講演会，昭和45年11月8日．