

九州大学工学部 正員 後藤恵之輔

学生員 〇小八重恵明

1 序言

有孔帯板の研究は、従来ほとんど単一孔を含む場合に限りており、複数個の孔を有するものについてはきわめてまれである。するうち、前者に関しては Howland, Wang および 鶴戸らが円孔を取扱い、石田は楕円孔および正方形孔を対象として一連の研究を行っている。後者に対しては面谷・井ノの 1 列円孔と 2 列孔を有する場合の研究がある。一方、有孔帯板には、孔あきカバープレートやデッブプレートに見られるごとく、数多くの孔が含まれているものも少なくない。本研究は、一列等間隔に並んだ無限個数の孔を有する帯板の引張り問題を取扱ったもので、孔形状は任意であり、解法には著者独自の考案による複素変数法と逐点法との併用法を用いた。

2 解法および計算例

孔の外部領域を単位円の外部へ等角写像する関数を、次式で表わす。

$$Z = R \left(\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n} \right) \quad (1)$$

ここに、 $Z = x + iy$, $\zeta = \rho \exp(i\theta)$, (x, y) : 直角座標, (ρ, θ) : 極座標, R : 孔の大きさをも与える定数, a_n : 一般に 0 でない複素数係数。

二次元弾性問題の解は、Muskhelishvili の複素変数法を用いて、二種の複素応力関数を決定することに帰着する。いま、これらの応力関数を次式のごとく仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \\ \psi(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^k + \psi_1(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、係数 B_k , C_k および b_k と関数 $\psi_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \zeta^{-k}$ は境界条件より決定されるものである。

孔縁は応力自由であるとすれば、その境界条件式より b_k と $\psi_1(\zeta)$ とが、他の係数 B_k , C_k の関数として次式のごとく求められる。

b_k について:

$$b_k = \left\{ \begin{array}{ll} K > N-2 \text{ のとき} & K = N-2 \text{ のとき} \\ \left\{ \begin{array}{l} f_k - \bar{f}_k - \bar{C}_k, \quad k=1, 2, \dots, N-2 \\ -\bar{f}_k - \bar{C}_k, \quad k=N-1, N, \dots, K \\ -\bar{f}_k, \quad k=K+1, K+2, \dots, N+K-1 \\ 0, \quad k \geq N+K \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} f_k - \bar{f}_k - \bar{C}_k, \quad k=1, 2, \dots, K \\ -\bar{f}_k, \quad k=K+1, K+2, \dots, N+K-1 \\ 0, \quad k \geq N+K \end{array} \right. \\ K < N-2 \text{ のとき} & \left\{ \begin{array}{l} f_k - \bar{f}_k - \bar{C}_k, \quad k=1, 2, \dots, K \\ f_k - \bar{f}_k, \quad k=K+1, K+2, \dots, N-2 \\ -\bar{f}_k, \quad k=N-1, N, \dots, N+K-1 \\ 0, \quad k \geq N+K \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (3)$$

$\psi_1(\zeta)$ について:

$$\psi_1(\zeta) = \sum_{p=0}^{N+K-1} \bar{f}_p \zeta^p - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p \zeta^p - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k \zeta^{-k} - \frac{\bar{\omega}'(1/\zeta)}{\omega'(1/\zeta)} \varphi'(\zeta) \quad (4)$$

ここに、係数 $\bar{f}_k$ および $\bar{f}_k$ は次式よりそれぞれ B_k , b_k の関数として与えられる。

$$\bar{f}_k = \sum_{r=1}^k C_{N+1-r} \bar{B}_r \quad (5)$$

$$\bar{f}_k = \sum_{r=1}^{N+K-1} C_{N+1-r} \bar{B}_r \quad (6)$$

さらに、式(5)、(6)中の係数 C_{n+r-1} は想像肉の係数 a_r を用いて次式より算定される。

$$a_{n-1} = C_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j C_{n-j-1} \quad (7)$$

残る未定係数 B_k, C_k は外縁および隣接構造単位との接合部における境界条件より決定される。すなわち、Fig. 1に示される精肉孔について説明すれば次のとおりである。この場合、構造および荷重の対称性より4分の1領域(斜線を施した部分)を取扱えばよく、 $B_k = B_1, B_2, B_3, \dots, C_k = C_1, C_2, C_3, \dots$ である。応力および変位は、未定係数 B_k, C_k を含んで次式のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} & \Delta_z = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Re(\Delta_k(z)) \{k^2 5^{k-1} - k^2 R 5^{-(k+1)}\} - \Delta_k(z) \{k^2 (k-1) 5^{k-2} + k^2 (k+1) R 5^{-(k+2)}\} - \Delta_k(z) \{k^2 R 5^{k-1} + k^2 5^{-(k+1)}\} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} C_k Re(\Delta_k(z)) \{-k^2 R 5^{-(k+1)}\} - \Delta_k(z) \{k^2 (k+1) R 5^{-(k+2)}\} - \Delta_k(z) \{k^2 5^{k-1}\} \\ & \Delta_y = \Delta_z \text{の式において} \Delta_k(z) \text{を} \Delta_k(y) \text{に, } -\Delta_k(z) \text{を} +\Delta_k(z) \text{に, } -\Delta_k(y) \text{を} +\Delta_k(y) \text{におき換えればよい。} \\ & \Delta_{xy} = \Delta_z \text{の式において} \Delta_k(z) \text{を} \Delta_k(y) \text{に, } -\Delta_k(z) \text{を} +\Delta_k(z) \text{に, } -\Delta_k(y) \text{を} +\Delta_k(y) \text{におき換え, } k \text{を} \\ & I_n \text{とすればよい。} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} & 2G \Delta_x = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Re(\Delta_k(x)) \{k^2 5^{k-1} - k^2 R 5^{-(k+1)}\} - (k^2 R 5^{k-1} - 5^{-(k+1)}) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} C_k Re(\Delta_k(x)) \{-k^2 R 5^{-(k+1)}\} - 5^{k-1} \\ & 2G \Delta_y = \Delta_x \text{の式において} R \text{を} I_n \text{とすればよい。} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、 $R = k^2 R_1, R_2 = -1$ であり、 $\Delta_k(z),$

$\Delta_k(y), \dots, \Delta_k(z)$ は想像肉 $Z = \omega(z)$ の級数に因するものである。

他方、境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} & x = l \text{ において } \Delta_x = \Delta_y, \Delta_{xy} = 0 \\ & y = R \text{ において } \Delta_y = 0, \Delta_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(8)、(9)を(10)に代入することにより、未定係数 B_k, C_k に関する方程式が与えられるが、これらを完全に解くことは困難なるゆえ、逐点法を用いてこの連立方程式を解けば、係数 B_k, C_k が決定され、したがって、所要の応力および変位が求められることとなる。

計算結果の一部をFig. 1の精肉孔列についてFig. 2およびFig. 3に示す。なお、 $\mu = 1$ とし $\sigma = \sigma_0/2, \Delta = \Delta_0/2$ である。

参考文献

- 1) R.C.T. Howland: Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A, Vol. 229, 1930, pp. 48-86
- 2) C.-K. Wang: Jour. Appl. Mech., Vol. 13, No. 2, Jun. 1946, pp. A-77-A-84.
- 3) 鶴戸口: 機械学会論文集, 15巻50号, 昭和24年, pp. 78-87, pp. 97
- 4) 石田: 機械学会論文集, 21巻107号, 昭和30年7月, pp. 507-513, 514-518, 25巻159号, 昭和34年11月, pp. 1110-1118.
- 5) 西谷・井ノ口: 機械学会論文集, 33巻248号, 昭和42年2月, pp. 176-181.
- 6) 後藤: 九大工学集報, 45巻1号, 昭和47年1月, pp. 866-869.

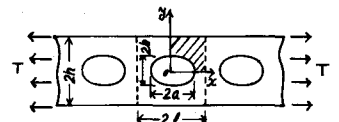


Fig. 1 Strip with a row of infinite elliptic holes.

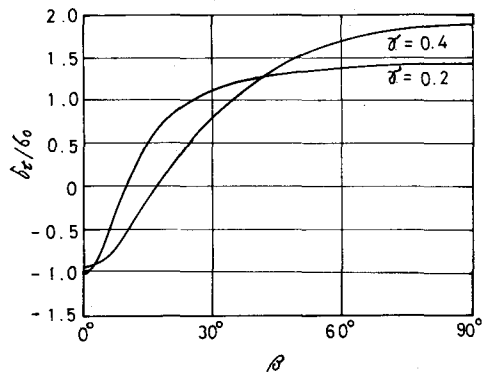


Fig. 2 Stress distribution around an elliptic hole ($\mu = 0.5$).

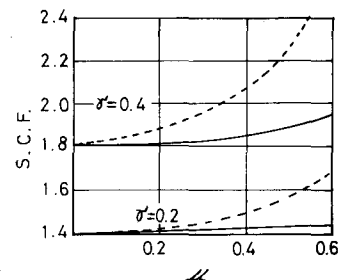


Fig. 3 Stress concentration factor