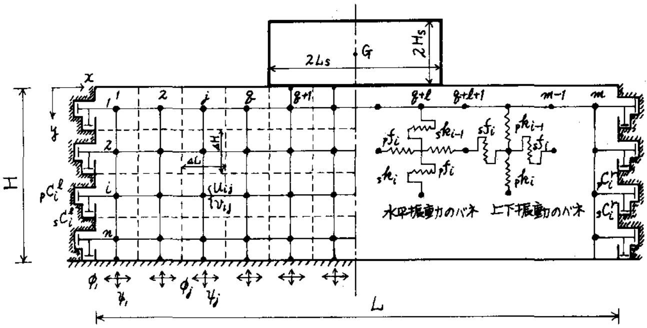
I－17　　Feed-back 理論を応用した地盤－剛体系の地震応答解析

九州大学　工学部　正員　小坪清真
九州工業大学　正員　○高西照彦

1. まえがき

著者等は前著[1]において，feed-back 理論による基礎地盤の地震応答解析法について論じ，2，3の計算例を示して，著者等の提案する解析法の有用性を確かめた。

本論は，同じく feed-back 理論を用いて図－1に示すような剛構造物－基礎地盤系の地震応答解析法について考察を行ったものである。なお本論では，図－1に示す系はその奥行方向の振動特性は一様であると考えて2次元解析を行った。



図－1　基礎地盤－剛構造物系の振動モデル

2. 解析の基本的考え方

一般の地盤はそれを各層の力学的性質が一様な多層地盤で近似できると考える。まず，(1) 本解法は，この多層地盤を多質点系に置換し，図－1に示す剛構造物－基礎地盤系に対する振動数および振動型を用いて，これを適当な次数までとって，その各振動型に適当な重みを掛けて加え合わせて剛構造物および地盤内各点の変位を求めるいわゆる modal analysis の手法を用いる。つぎに，(2) この各振動型に応ずる振動系に対する入力について考える。例えば多層地盤に対して適用される波動法の入力についてみれば，上層における加速度あるいは変位の一定割合がある一定の時間遅れをもって刻々基盤の入力に feed-back されていることが判る。したがって前述の各振動系に対する入力についても同様に考えて，上層の各層における加速度の一定割合をある一定の時間遅れをもって刻々 feed-back することによって，各振動系に対する入力を補正し，その補正された入力を用いて刻々の応答計算を行えば，modal analysis の手法を用いて波の重複反射および屈折の現象を考慮した変位応答の近似値を得ることができる。図－1にみるように，その上部に剛体が存在する地盤部分と上部が自由表面である地盤部分とについては，勿論その入力に対する補正値（feed-back すべき量）が異なる。この値に関する議論は才5節で述べる。さらに，(3) 地盤の水平方向の左右境界には図－1に示すように適当な dashpot を置いて，ここに到達した波はその全 energy を系外に逸散させるようにする。このようにすれば，水平方向に無限の拡がりをもつ地盤の波動特性を図－1の系で近似的に表現できる。境界に設置する dashpot の減衰定数については才6節に述べる。

3. 振動方程式

剛構造物および地盤内各点の相対変位は次式のように表わせる。

$$u_{ij}=\sum_{s=1}^{S} a_s U_{ijs}\,,\quad v_{ij}=\sum_{s=1}^{S} a_s V_{ijs}\,,\quad u_G=\sum_{s=1}^{S} a_s U_{Gs}\,,\quad v_G=\sum_{s=1}^{S} a_s V_{Gs}\,,\quad \theta_G=\sum_{s=1}^{S} a_s \Theta_{Gs} \qquad \text{------------(1)}$$

ここに，u_{ij}, v_{ij} は質点 (i,j) の水平および上下方向変位，u_G, v_G, θ_G は剛構造物の重心の水平，上下方向変位および回転角，$U_{ijs}, V_{ijs}, U_{Gs}, V_{Gs}, \Theta_{Gs}$ はそれぞれ質点 (i,j) の才 s 次の水平，上下方向の振動型，

および剛構造物の重心の水平，上下，回転の振動型を示す。また，a_sは第s次の基準座標，Sは採用する振動型の最高次数を表わす。

(1)式を用いて，図－1に示す振動系の運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを求め，これを*Lagrange*の方程式に代入すれば，次の微分方程式が得られる。

$$\ddot{a}_s + \omega_s^2 a_s = Q_s/A \quad , \qquad A = \frac{1}{g}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(w_{ij}U_{ijs}^2 + w_{ij}V_{ijs}^2\right) + W_G U_{Gs}^2 + W_G V_{Gs}^2 + I_G \Theta_{Gs}^2\right\} \quad \text{---------} (2)$$

ここに，ω_sは系の第s次の固有円振動数，w_{ij}は質点(i,j)の重量，W_G, I_Gは剛構造物の重量および重心まわりの慣性モーメント，n, mはそれぞれ基礎地盤の深さHと水平長Lの分割数，gは重力の加速度である。また，Q_sは第s次の一般力を表わし，これは次のようにして求めることができる。

図－1の系の絶対変位を次式のように表わす。

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{u}_{ij} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{m}\left\{f_{ijk}^{u}\phi_k(t) + g_{ijk}^{u}\psi_k(t)\right\}, \qquad \tilde{v}_{ij} = v_{ij} + \sum_{k=1}^{m}\left\{f_{ijk}^{v}\phi_k(t) + g_{ijk}^{v}\psi_k(t)\right\} \\ \tilde{u}_G = u_G + \sum_{k=1}^{m}\left\{f_{Gk}^{u}\phi_k(t) + g_{Gk}^{u}\psi_k(t)\right\}, \quad \tilde{v}_G = v_G + \sum_{k=1}^{m}\left\{f_{Gk}^{v}\phi_k(t) + g_{Gk}^{v}\psi_k(t)\right\}, \quad \tilde{\theta}_G = \theta_G + \sum_{k=1}^{m}\left\{f_{Gk}^{\theta}\phi_k(t) + g_{Gk}^{\theta}\psi_k(t)\right\} \end{array}\right\} (3)$$

ここに，f_{ijk}^{u}, g_{ijk}^{u}等は図－1において，基盤上のk点が単位長の静変位をしたときの各点の弾性変位を表わす。u_{ij}等は各点の弾性変位を基準としたときの各点の動的な相対変位を示す。また，$\phi_k(t)$, $\psi_k(t)$は基盤上のk点の水平および上下方向の変位である。

さて，変位による強制振動は，系の各点がその弾性線に比例する加速度を外力として受ける振動系に置換することができる。これを*modal analysis*に応用すると，基準座標a_sに対する一般力Q_sは

$$Q_s = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{w_{ij}}{g}U_{ijs}\left\{\sum_{k=1}^{m}f_{ijk}^{u}\ddot{\phi}_k(t) + \sum_{k=1}^{m}g_{ijk}^{u}\ddot{\psi}_k(t)\right\} + \frac{w_{ij}}{g}V_{ijs}\left\{\sum_{k=1}^{m}f_{ijk}^{v}\ddot{\phi}_k(t) + \sum_{k=1}^{m}g_{ijk}^{v}\ddot{\psi}_k(t)\right\}\right]$$

$$-\frac{1}{g}\sum_{k=1}^{m}\left[\left\{W_G U_{Gs} f_{Gk}^{u} + W_G V_{Gs} f_{Gk}^{v} + \Theta_{Gs} f_{Gk}^{\theta}\right\}\ddot{\phi}_k(t) + \left\{W_G U_{Gs} g_{Gk}^{u} + W_G V_{Gs} g_{Gk}^{v} + \Theta_{Gs} g_{Gk}^{\theta}\right\}\ddot{\psi}_k(t)\right] \quad \text{-----------} (4)$$

と表わせる。ここに，添字・・は時間に関する2階微分を意味する。

基盤上の各点の加速度$\ddot{\phi}_k(t)$, $\ddot{\psi}_k(t)$の刻々の値が与えられれば，(4)式からQ_sを求めて，この値を(2)式に代入して後，(2)式を解いて，(1)式から各点の相対的な変位を計算することができる。また，この値を(3)式に代入すれば，各点の絶対変位を求めることができる。

4. 振動数方程式および振動型　　　図－1に示す剛構造物－基礎地盤系の振動方程式を行列表示すれば次のようになる。

$$\mathbb{M}\ddot{\tilde{x}} + \mathbb{C}\ddot{\tilde{\tilde{x}}} + (\mathbb{K}_f + \mathbb{K}_k)\tilde{x} = \mathbb{F} \quad \text{-----------------} (5)$$

ここに，$\tilde{x} = (\tilde{u}_1\,\tilde{u}_2 \cdots \tilde{u}_m\,\tilde{v}_1\,\tilde{v}_2 \cdots \tilde{v}_m\,\tilde{z})^T$, $\tilde{u}_i = (\tilde{u}_{1i}\,\tilde{u}_{2i} \cdots \tilde{u}_{ni})$, $\tilde{v}_i = (\tilde{v}_{1i}\,\tilde{v}_{2i} \cdots \tilde{v}_{ni})$, $\tilde{z} = (\tilde{u}_G\,\tilde{v}_G\,\theta_G)$,
$\tilde{\tilde{x}} = (\tilde{\tilde{u}}_1\,\tilde{\tilde{u}}_2 \cdots \tilde{\tilde{u}}_m\,\tilde{\tilde{v}}_1\,\tilde{\tilde{v}}_2 \cdots \tilde{\tilde{v}}_m\,\mathbb{O}_3)$,　添字≈は基礎地盤各点の絶対変位の差を表わす。

$$\mathbb{M} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} w_1^u & & & & & & \\ & w_2^u & & & & \mathbb{O} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & w_m^u & & & \\ & & & & w_1^v & & \\ & \mathbb{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & w_m^v & \\ & & & & & & \mathbb{W} \end{pmatrix} \qquad w_i^u = \begin{pmatrix} w_{1i} & & \mathbb{O} \\ & w_{2i} & \\ & & \ddots \\ \mathbb{O} & & & w_{ni} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{W} = \begin{pmatrix} W_G & & \mathbb{O} \\ & W_G & \\ \mathbb{O} & & I_G \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \cdots & m & 1 & 2 & \cdots & m & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} {}_p\mathbb{C}^l & & & & & & \\ \mathbb{O}^n & \ddots & & & & \mathbb{O} & \\ & & \mathbb{O}^n & & & & \\ & & {}_p\mathbb{C}^r & & & & \\ & & {}_s\mathbb{C}^l & & & & \\ & & \mathbb{O}^n & \ddots & & & \\ & \mathbb{O} & & & \mathbb{O}^n & & \\ & & & & {}_s\mathbb{C}^r & & \\ & & & & & & \mathbb{O}^3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$${}_p\mathbb{C}^l = \begin{pmatrix} {}_pC_1^l & & \mathbb{O} \\ & {}_pC_2^l & \\ & & \ddots \\ \mathbb{O} & & & {}_pC_m^l \end{pmatrix} \quad {}_p\mathbb{C}^r = \begin{pmatrix} {}_pC_1^r & & \mathbb{O} \\ & {}_pC_2^r & \\ & & \ddots \\ \mathbb{O} & & & {}_pC_m^r \end{pmatrix} \quad {}_s\mathbb{C}^l = \begin{pmatrix} {}_sC_1^l & & \mathbb{O} \\ & {}_sC_2^l & \\ & & \ddots \\ \mathbb{O} & & & {}_sC_m^l \end{pmatrix} \quad {}_s\mathbb{C}^r = \begin{pmatrix} {}_sC_1^r & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & {}_sC_m^r \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{O}^n = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \mathbb{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mathbb{O}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{F} = (\mathbb{F}_1^u\,\mathbb{F}_2^u \cdots \mathbb{F}_m^u\,\mathbb{F}_1^v\,\mathbb{F}_2^v \cdots \mathbb{F}_m^v\,\mathbb{O}_3)^T$,　$\mathbb{F}_i^u = (\overset{1}{0}\;\overset{2}{0} \cdots \overset{n-1}{0}\;\overset{n}{{}_sk_n\phi_i})$,　$\mathbb{F}_i^v = (\overset{1}{0}\;\overset{2}{0} \cdots \overset{n-1}{0}\;\overset{n}{{}_pk_n\psi_i})$,　$\mathbb{O}_3 = (0\,0\,0)$,

$$\mathbb{K}_f=\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 2 & \cdots & m & 1 & 2 & \cdots & m & 1\end{matrix}\\ \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} \mathbf{f}_p & -\mathbf{f}_p & & & & & & & \\ -\mathbf{f}_p & 2\mathbf{f}_p & \ddots & & & & \mathbb{O} & & \\ & \ddots & 2\mathbf{f}_p & -\mathbf{f}_p & & & & & \\ \mathbb{O} & & -\mathbf{f}_p & \mathbf{f}_p & & & & & \\ \hline & & & & \mathbf{f}_s & -\mathbf{f}_s & & & \\ & & & & -\mathbf{f}_s & 2\mathbf{f}_s & \ddots & \mathbb{O} & \\ & \mathbb{O} & & & & \ddots & 2\mathbf{f}_s & -\mathbf{f}_s & \\ & & & & \mathbb{O} & & -\mathbf{f}_s & \mathbf{f}_s & \\ \hline & & & & & & & & \mathbb{O}^3 \end{array}\right)\end{array}$$

$$\mathbb{K}_k=\begin{array}{c}\begin{matrix}1\cdots q\cdots q+l\cdots m & 1\cdots q\cdots q+l\cdots m & 1\end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccccccccccccc} \mathbb{K}_s & & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & \mathbb{K}_s & & & & & & & & & & \\ & & & \mathbb{K}_s' & & & & & & & & & \mathbb{K}_s'' \\ & & & & \ddots & & & & & & \mathbb{O} & & \vdots \\ & & & & & \mathbb{K}_s' & & & & & & & \mathbb{K}_s'' \\ & & & & & & \mathbb{K}_s & & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & \mathbb{K}_s & & & & \\ & & & & & & & & & \mathbb{K}_p & & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & \mathbb{K}_p & & \\ & & & & & & & & & & & \mathbb{K}_p' & \mathbb{K}_{p1}'' \\ & & & \mathbb{O} & & & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & & & & \mathbb{K}_p' & \mathbb{K}_{pl}'' \\ & & & & & & & & & & & \mathbb{K}_p \ \ddots \ \mathbb{K}_p & \\ & & & \mathbb{K}_s''^{T} & \cdots & \mathbb{K}_s''^{T} & & & & & \mathbb{K}_{p1}''^{T} & \cdots\ \mathbb{K}_{pl}''^{T} & \mathbb{K}_G \end{array}\right)\end{array}$$

*) $\mathbb{K}_p$, $\mathbb{K}_p'$は$\mathbb{K}_s$, $\mathbb{K}_s'$において添字sを添字pに変えればよい。

$$\mathbf{f}_p=\begin{pmatrix} {}_pf_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & {}_pf_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}_s=\begin{pmatrix} {}_sf_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & {}_sf_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{K}_s=\begin{pmatrix} {}_sk_1 & -{}_sk_1 & & \mathbb{O} \\ -{}_sk_1 & {}_sk_1+{}_sk_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -{}_sk_{n-1} \\ \mathbb{O} & & -{}_sk_{n-1} & {}_sk_{n-1}+{}_sk_n \end{pmatrix} \qquad \mathbb{K}_s'=\begin{pmatrix} {}_sk_0+{}_sk_1 & -{}_sk_1 & & \mathbb{O} \\ -{}_sk_1 & {}_sk_1+{}_sk_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -{}_sk_{n-1} \\ \mathbb{O} & & -{}_sk_{n-1} & {}_sk_{n-1}+{}_sk_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{K}_G=\begin{pmatrix} {}_sk_0 l & 0 & -{}_sk_0 H_s l \\ 0 & {}_pk_0 l & {}_pk_0\sum_{i=1}^{l}(x_{q+i}-x_G) \\ -{}_sk_0 H_s l & {}_pk_0\sum_{i=1}^{l}(x_{q+i}-x_G) & {}_sk_0 H_s^2 l+{}_sk_0\sum_{i=1}^{l}(x_{q+i}-x_G)^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{K}_s''=\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} -{}_sk_0 & 0 & {}_sk_0H_s \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{array} \qquad \mathbb{K}_{pi}''=\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & -{}_pk_0 & -{}_pk_0(x_{q+i}-x_G) \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{array}$$

上式中，${}_pC_i^l$等は図－1に示すように地盤の水平方向の境界における*dashpot*の減衰定数を表わす。${}_sf_i$, ${}_pk_i$等は図－1に示すようなバネのバネ定数である。lは剛構造物と接する質点の数，x_{q+i}, x_Gはそれぞれ図－1に示す座標軸の原点から質点$(1, q+i)$まで，および剛構造物の重心までの距離である。

さて，(5)式において，　$\mathbb{C}=\mathbb{O}$，　$\mathbb{F}=\mathbb{O}$，　$\tilde{x}=\tilde{\mathbb{X}}\sin\omega t$ ---------------- (6)

とおけば　　$(-\omega^2\mathbb{M}+\mathbb{K}_f+\mathbb{K}_k)\tilde{\mathbb{X}}=\mathbb{O}$ ---------------------------- (7)

したがって，振動数方程式は次の行列式で与えられる。

$|\mathbb{K}_f+\mathbb{K}_k-\omega^2\mathbb{M}|=0$ -- (8)

つぎに，各次数に対する振動型は(8)式を満足する各ω_iの値に応じて，(7)式を満足する$\tilde{\mathbb{X}}_i$として求めることができる。

さらに，基盤上のk点が水平方向に単位長の静変位をした時の各点の弾性変位は，(5)式において，$\mathbb{C}=\mathbb{O}$，$\ddot{\tilde{x}}=\mathbb{O}$　とおき，列ベクトル$\mathbb{F}$の要素中，$\phi_k=1$, $\phi_i=0$, $\psi_i=0$　$(i=1,2,\cdots k-1, k+1,\cdots m)$とし，すなわち，次式を解いて$\tilde{x}$を求めればよい。　　$(\mathbb{K}_f+\mathbb{K}_k)\tilde{x}=\mathbb{F}_{(\phi_k=1)}$ ------------- (9)

5. 入力波動$\ddot{\phi}_k(t)$, $\ddot{\psi}_k(t)$について

図－1において，その上部が自由表面である場合の入力波動に対する補正量については，既に前著[(1)]でくわしく述べた。その上部に剛構造物が存在している場合の入力波動に対する補正量に関する議論については，紙数の関係でここには述べない。

6. 減衰定数について

基礎地盤の水平方向の境界に設置した*dashpot*の減衰定数は次のように考えてその値を決めた。すなわち，この境界を透過する縦波および横波の1波長当りの全*energy*が，そこに設置された*dashpot*によって1*cycle*当りに失われる*energy*に等しくなるようにその減衰定数の値を定めた。例えば${}_pC_i^l$は${}_pC_i^l=\frac{\rho_i}{g}SC_p$と表わせる。$S$：断面積，$C_p$：縦波の速度。

7. 数値計算

数値計算結果については講演時発表の予定である。

(1)：小坪・高西「Feed-Back系による地盤振動の反射屈折現象の表現」　第26回土木学会全国大会講演概要　昭46年10月