

中路式補剛アーチ橋の固有値解析

—結合法の応用とアーチの水平変位拘束効果—

熊本大学 正員 吉村虎蔵

熊本大学 正員 早井一男

川崎重工 正員 有吉和夫

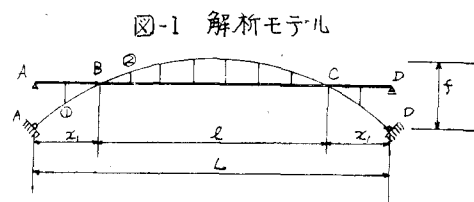
同 学生員 水田洋司

はじめに

筆者等は、下路式および上路式補剛アーチ橋の固有値を、動的結合法によって解く方法を発表¹⁾した。この方法の特長は結合力が1つだけでよく、固有行列の次数が1であることである。ここでは中路式補剛アーチ橋の固有値解析を動的結合法によって行う方法と解析例について報告する。まずアーチの一部を水平方向に変位を拘束した場合について理論を立てた。さらにこの場合とアーチの水平変位が自由の場合、および上路式、下路式の場合との固有値の比較をし、アーチの水平拘束効果をも調べた。この解析理論は、中路式で水平無拘束のとき、および下路式、上路式補剛アーチ橋の固有値解析を特殊なケースとして含み、単支間の場合の一般式といえることができる。

1. アーチの変位を水平方向に拘束した中路式補剛アーチ橋の固有値の解析理論

解析モデルとしては図-1のモデルを考え、従来と同じような仮定を設けて解析を行う。中路式の場合、モード： $\varphi = \sum a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ のうち、 $n=1, 3, 5, \dots$ の対称振動に対しては、アーチクラウンは動かないけれども、B点では、アーチは水平方向に変位しようとし、A点がヒンジ止めされているから



、補剛桁はその水平方向の変位を拘束しようとする。一方、C点の水平拘束力はD点がローラのため明らかに零であるから、橋全体としては、水平拘束力が非対称となり、 $n=1, 3, 5, \dots$ だけよりなる対称振動は存在しない。 $n=2, 4, 6, \dots$ の逆対称振動についても同様の事が言える。だから図-1のモデルの固有値を対称振動と逆対称振動の2つのケースに分けて解析することはできない。

1.1 適合条件

鉛直振動モードは $\varphi(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n \sin(n\pi x/L)$ (1)

アーチスパンの伸び Δl_a は文献(1)によれば $\Delta l_a = \sum_j \Delta x_j = \sum_j \Delta y_j \tan \alpha_j - \sum_j \sec \alpha_j \cdot \Delta A_j$ (2)

ここに、 Δy_j は相隣る格点の鉛直相対たわみ、 α_j はアーチ弦の水平からの傾き

ΔA は軸力によるアーチの縮み

AB間、ABC間、ABCD間の適合条件(アーチの伸びと補剛桁の伸びの関係)とB点、C点での水平力のつり合条件より次式を得る。

$$\frac{L}{A_g E} \begin{bmatrix} \frac{x_1}{L} + \frac{A_g}{A_a} B_1 & 0 & -\frac{x_1}{L} \\ \frac{x_1}{L} + \frac{A_g}{A_a} B_1 & \frac{\ell}{L} + \frac{A_g}{A_a} B_2 & -\frac{x_1}{L} + \frac{\ell}{L} \\ \frac{A_g}{A_a} B_1 & \frac{A_g}{A_a} B_2 & \frac{A_g}{A_a} B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \sum a_n \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_1(n) + f_2(n) \\ f_1(n) + f_2(n) + f_3(n) \end{bmatrix} \quad (3)$$

あるいは上式を次の様にかくことにする。

$$\frac{L}{A_g E} \cdot C \cdot H = \sum a_n f \quad (3)$$

ここに、 C は式(3)の左辺の正方マトリックスで、 f は右辺の列ベクトルをあらわす。

式(3)において, $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$ は, いかなる n の値に対しても同時に零になることはない。また左辺の係数行列式キ 0 であるから, H_1 , H_2 , H_3 は同時に零にならない。

$$\begin{aligned} \text{式(3)において, } f_1(n) &= \frac{4f}{L} \left\{ \frac{L}{L} \sin \frac{n\pi x_1}{L} + \frac{2}{n\pi} (1 - \cos \frac{n\pi x_1}{L}) \right\} \\ f_2(n) &= \frac{4f}{L} \left\{ -\frac{L}{L} \left(\sin \frac{n\pi x_1}{L} + \sin \frac{n\pi(L-x_1)}{L} \right) + \frac{2}{n\pi} (\cos \frac{n\pi x_1}{L} - \cos \frac{n\pi(L-x_1)}{L}) \right\} \\ f_3(n) &= \frac{4f}{L} \left\{ \frac{L}{L} \sin \frac{n\pi(L-x_1)}{L} + \frac{2}{n\pi} (\cos \frac{n\pi(L-x_1)}{L} - \cos n\pi) \right\} \\ B_1 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{L}{L} + 8 \left(\frac{f}{L} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{L}{L} \right)^3 \right) + 19.2 \left(\frac{f}{L} \right)^4 \left(1 - \left(\frac{L}{L} \right)^5 \right) \right\} \\ B_2 &= \frac{L}{L} + 8 \left(\frac{f}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{L} \right)^3 + 19.2 \left(\frac{f}{L} \right)^4 \left(\frac{L}{L} \right)^5, \quad B_3 = B_1 \end{aligned}$$

H_1 , H_2 , H_3 はそれぞれアーチ AB, BC, CD の軸力の水平成分。 $a_n f_1(n)$, $a_n f_2(n)$, $a_n f_3(n)$ は同じくアーチのそれぞれの部分の $\int \tan \alpha \cdot d\varphi$ の値。

1.2 振動数方程式

図-1 のアーチの①点, B点, ②点, C点における鉛直方向の力の釣合いを考える。

$$\text{①点, } T_1 = H_1 (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) = H_1 \frac{8f}{L^2} \Delta x = p_{a1} \cdot \Delta x \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{B点, } T_B &= H_1 \tan \alpha_2 - H_2 \tan \alpha_3 = H_1 \frac{8f}{L^2} \Delta x + (H_1 - H_2) \tan \alpha_3 \\ &= p_{a1} \Delta x + P_1 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{②点, } T_2 = H_2 (\tan \alpha_3 - \tan \alpha_4) = H_2 \frac{8f}{L^2} \Delta x = p_{a2} \cdot \Delta x \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{C点, } T_C &= H_3 \tan \alpha_2' - H_2 \tan \alpha_3' = H_3 \frac{8f}{L^2} \Delta x + (H_3 - H_2) \tan \alpha_3' \\ &= p_{a3} \cdot \Delta x + P_2 \quad (7) \end{aligned}$$

ここに, Δx は格間長

以上の四つの式よりわかるように, アーチの各部分では等分布荷重 p_{a1} , p_{a2} , p_{a3} が作用し, アーチと補剛桁の交差点 B, C では分布荷重の他に集中力 P_1 , P_2 を考慮する必要がある。

アーチに働く力が上のようであるから, いま補剛桁に式(4)~式(7)より図-3に示すような周期外力を作用させる。この場合の運動方程式は, Φ_n , ω_n を補剛桁のみの n 次の標準化モード, 固有値とすると,

$$\ddot{w}_n(x) + \omega_n^2 w_n(x) = \Phi_n(x) \{ \sum \Phi_n(x) p_{a1} \sin \omega t + \sum \Phi_n(x) P_1 \sin \omega t \}$$

故に $w(x) = \sum w_n(x)$

$$= \sum \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \Phi_n(x) \{ p_{a1} \int_0^L \Phi_n(x) dx + p_{a2} \int_{L-x_1}^L \Phi_n(x) dx + p_{a3} \int_{L-x_1}^L \Phi_n(x) dx + \Phi_n(x) P_1 + \Phi_n(x) P_2 \} \cdot \sin \omega t \quad (8)$$

$$n \text{ 次のため } w_n(x) = \frac{1}{\eta^2 - \lambda^2} \frac{2L^3}{EI\pi^3} \left\{ \frac{p_{a1}}{L} (F_1(n) + F_{p1}(n)) + \frac{p_{a2}}{L} (F_2(n) - F_{p1}(n) - F_{p2}(n)) + \frac{p_{a3}}{L} (F_3(n) + F_{p2}(n)) \right\} \cdot \sin \omega t \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } F_1(n) &= (1 - \cos(n\pi x_1/L)) / n\pi, & F_{p1}(n) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{L}{L} \right) \sin(n\pi x_1/L), \\ F_2(n) &= (\cos(n\pi x_1/L) - \cos(n\pi(L-x_1)/L)) / n\pi, & F_{p2}(n) &= \frac{1}{2} \left(\frac{L}{L} \right) \sin(n\pi(L-x_1)/L), \\ F_3(n) &= (\cos(n\pi(L-x_1)/L) - \cos n\pi) / n\pi, & \lambda &= \omega/\omega_n = \omega / (\frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{EI/\rho}) \end{aligned}$$

ところで $a_n = \max w_n(x)$ だから, 式(3)の a_n の代りに $w_n(x)$ の最大値 ($\sin \omega t = 1$ の場合) を入れ, さらに H の代りに式(4)~式(7)の P , P を代入する。この時 P は P で表わせるから次式を得る。

$$C \cdot p_a = \Omega \cdot P_1 \quad (10)$$

ここに, $C = (\pi^2 I / 16 A_g f L) \cdot C$, $\Omega = \sum \frac{1}{\eta^2 - \lambda^2} f \cdot F$, $F = [F_1(n) + F_{p1}(n), F_2(n) - F_{p1}(n) - F_{p2}(n), F_3(n) + F_{p2}(n)]$

図-2 鉛直力の釣合い

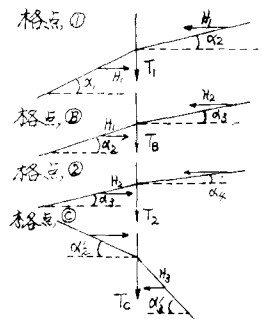
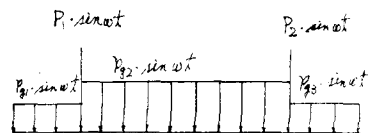


図-3 補剛桁に作用する力



自由振動しているとき、外力は働かないから $R_0 + R_3 = 0$ (11)

式(11)を式(10)に代入して $(C' + R_2) \cdot R_3 = 0$ (12)

結合力 $R_3 \neq 0$ のとき $\det(C' + R_2) = 0$ (13)

振動数方程式(13)より固有値が求たら、これを式(12)に代入して p の比を求め、これを式(9)に代入してモードを求めることができる。

②. アーチに水平拘束力のない場合

3次の固有行列式(10)は、中路アーチ橋において補剛桁の両端がともにローラーの場合には $H_1 = H_6$ で2次の行列式となる。このときは逆対称振動と対称振動とに分けることができるが、逆対称振動は補剛桁だけの逆対称振動に等しいから、対称振動についてだけ上の2次の行列式で計算すればよい。ただし、 $n=1, 3, 5, \dots$ 。また上路式でアーチクラウンが水平に拘束される場合と無拘束の場合も、上式の特異なケースとして容易に求められるし、下路式の場合も同様である。

③. 数値計算

諸元は表-1に示す戸崎橋を例にとり、中路式で $\frac{Z_1}{L} = 0.1$ 、 $\frac{Z_1}{L} = 0.25$ の各々について水平拘束のある場合、無拘束の場合の固有値とモードの計算を行い、その結果を表-2と図-4に示す。また結果の比較検討のために同じ諸元の上路式、下路式の固有値を表-2に記している。固有値の収束を調べるために、水平拘束の場合は、 $n=6, 10, 15$ について、無拘束の場合は $n=8, 10, 12$ について調べた結果、両方とも $n=10$ で収束するので、 n の値は10までと数値計算を行った。

表-1 戸崎橋の諸元

	数 値
支 間	$1.392 \times 10^4 \text{ cm}$
ラ イ ズ	$1.92 \times 10^3 \text{ cm}$
補剛桁の断面積	562.35 cm^2
アーチの断面積	345.40 cm^2
桁の断面2次モーメント	$6.232 \times 10^6 \text{ cm}^4$
弾性係数	$2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

表-2 固有値比較

(係数: $(\frac{\pi^2 EI}{H^3})$)

橋の種類 \ 次数(n)		1	2	3	4	5	6
上路式	単純橋	1	4	9	16	25	36
	下路式	7.132	4	9.949	16	25.05	36
上路式	水平拘束	7.852	7.713	11.12	16	25.09	36.07
	無拘束	7.852	4	11.12	16	25.09	36
中路式 アーチ	$\frac{Z_1}{L} = 0.1$	水平拘束	8.926	7.132	14.31	21.45	32.23
		無拘束	8.867	4	14.20	16	30.93
	$\frac{Z_1}{L} = 0.25$	水平拘束	8.490	10.78	18.07	16.36	25.64
		無拘束	8.490	4	16.75	16	25.55

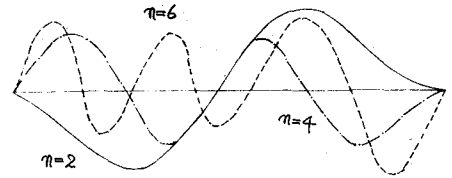
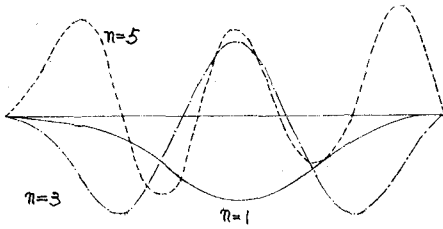
④. 結び

便宜上、表-2では各形式のアーチ橋の固有値を、単純橋の1次、2次、…のモードに対応すると思われるモードの順に並べて、1次、2次、…と名付けてあるが、この解析モデルについては次のことが言えると思う。

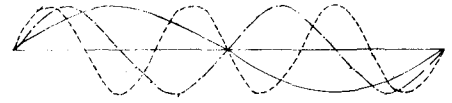
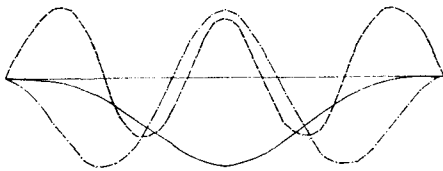
1次固有値については、下路式より上路式が高く、さらに中路式無拘束の場合が高くなる。また水平拘束の効果は $\frac{Z_1}{L} = 0.25$ のときよりも $\frac{Z_1}{L} = 0.1$ の場合に表われる。2次固有値については、下路、上路無拘束、中路無拘束の場合とも補剛桁のみの2次固有値と等しく、アーチは働かない。しかしながら

図-4 モード

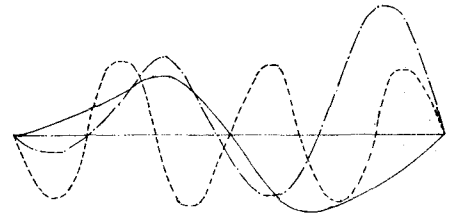
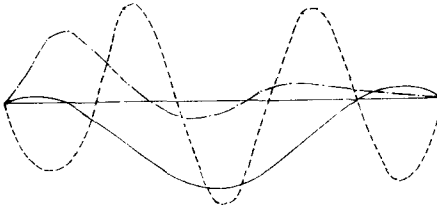
(a) 水平拘束 $\frac{Z_1}{L} = 0.1$



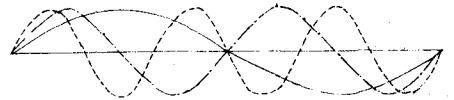
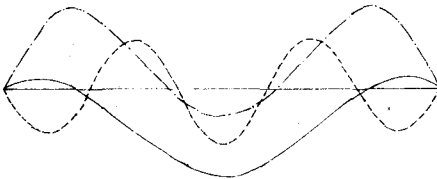
(b) 無拘束 $\frac{Z_1}{L} = 0.1$



(c) 水平拘束 $\frac{Z_1}{L} = 0.25$



(d) 無拘束 $\frac{Z_1}{L} = 0.25$



5水平拘束の場合その効果が著しく表われ、上路式無拘束時の約1.9倍、中路式では $\frac{Z_1}{L} = 0.1$ のとき1.8倍、 $\frac{Z_1}{L} = 0.25$ のとき2.7倍にも高くなる。水平拘束効果が最小固有値において最も著しいことは注目すべきことである。3次固有値においても、下路、上路の場合よりも中路式の方が高い。4次においても同様である。5次においては、中路式の $\frac{Z_1}{L} = 0.1$ 以外はいずれの場合も、補剛桁のそれとほとんどかわらない。高次については補剛桁の固有値と一致し、アーチの効果がないことになる。

[注] (1) 吉村, 平井. ランガー橋の動的解析, 土木学会論文第101号 S39.1

(2) 吉村, 平井. 補剛アーチ橋およびフリ橋の動的共通解析 土木学会論文第115号 S40.3

(3) 吉村 他. 上路式アーチ橋を水平に弾性拘束したときの結合法による動的解析とその効果 土木学会年次講演会(S43.10)