I－10　代表点法による平板の固有値計算法

九州大学 工学部　正員　小坪清真
九州工業大学　正員　高西照彦
同　学生員　○坪根康雄

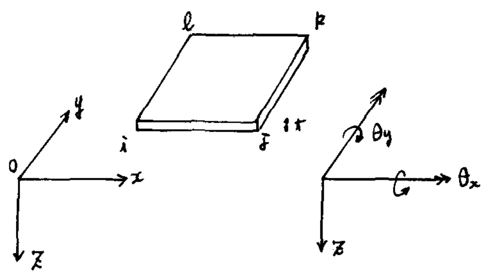
1．まえがき

薄板の曲げ振動の問題についてはこれまでもかなり多くの研究が発表されているにもかかわらず、その数値計算を行なうに当ってとるべき仮定および結果の精度に関してはまだ十分に解明されていない。そこで著者らは、一次元遠隔連成系に対する適用例において良い結果をもたらすことが示されている代表点法の概念を用いて、板の曲げ振動を解析し、有限要素法[1]による結果と比較検討した。

代表点法の特色は、強制振動の応答計算において有限要素法よりもΔtを大きくとれる。また、要素数を少なくとることが出来ることである。

2．代表点法による振動方程式の誘導

a．撓み曲面の近似　図－1に示すように、xy面と一致している板の長方形要素$ijkl$を考え、その各節点での変位を$\{\delta_n\}$とする。変位$\{\delta_n\}$は、各点で3個の成分をもち、第一はz方向の変位W_n、第二はx軸まわりの回転$\{\theta_n\}_x$、第三はy軸まわりの回転$\{\theta_n\}_y$である。zと回転成分の関係は次式で与えられる。

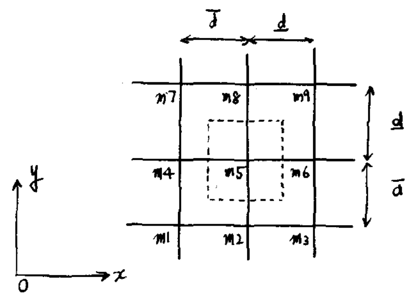


図－1

$$\theta_x = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \theta_y = \frac{\partial z}{\partial x}$$

次に図－2に示すように代表点9個を考え、各点の$\{\delta\}$を連成させて、板の変形を9点を通る撓み曲面で近似する。この曲面を$z(x,y)$とし、27個のパラメーターから成る多項式とする。この27個の項は次のようなものである。

$1,\ x,\ y,\ x^2,\ y^2,\ xy,\ x^3,\ y^3,\ xy^2,\ x^2y,$
$x^4,\ y^4,\ xy^3,\ x^2y^2,\ x^3y,\ x^5,\ y^5,\ xy^4,\ x^2y^3,\ x^3y^2,$
$x^4y,\ x^6,\ y^6,\ xy^5,\ x^2y^5,\ x^4y^2,\ x^5y$



図－2

b．変位係数の近似　図－2に示すように代表点$m1$～$m9$に作用する単位の垂直荷重及びx方向，y方向のモーメントがn点に及ぼす変位α^{z}_{nm1}, $\alpha^{\theta x}_{nm1}$, $\alpha^{\theta y}_{nm1}$ ～ α^{z}_{nm9}, $\alpha^{\theta x}_{nm9}$, $\alpha^{\theta y}_{nm9}$を用いこの区間の変位係数α^{z}_{nm}, $\alpha^{\theta x}_{nm}$, $\alpha^{\theta y}_{nm}$を撓み曲面と同様に27個のパラメーターからなる多項式で表わす。その各項は、撓み曲面で用いたものと同じである。ここで用いる変位係数α_{nm}は有限要素法より求めた剛性マトリックスの逆マトリックスであるが、計算上のテクニックとしては、逆マトリックスを求めずに、解析することが出来る。

c. 振動方程式　図－2に示すように、m5を中心にx方向$(a+a')/2$, y方向$(d+d')/2$の区間の分布慣性力がn点に及ぼす変位は、撓み曲面, 変位係数を用いて次式で表わすことが出来る。

$$Z(x,y)=-\iint\frac{\rho t}{g}\alpha_{nx}^{z}\ddot{Z}\,dx\,dy+\iint\frac{\rho t^3}{12g}\alpha_{nx}^{\theta x}\frac{\partial\ddot{Z}}{\partial y}dx\,dy-\iint\frac{\rho t^3}{12g}\alpha_{nx}^{\theta y}\frac{\partial\ddot{Z}}{\partial x}dx\,dy+F\alpha_{nx}^{z}$$

但し　ρ－単位体積重量，t－板厚，g－重力の加速度，F－強制外力

以上をマトリックス表示すると次のようになる。

$$\{Z\}=[1,x,y,x^2,y^2,\sim\sim,x^4y,x^5y]\begin{Bmatrix}a_1\\ \wr\\ a_{27}\end{Bmatrix}=[P]\{A\}$$

$$\{\delta_{m1}\}=\begin{Bmatrix}\delta_{m1}^{z}\\ \delta_{m1}^{\theta x}\\ \delta_{m1}^{\theta y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Z_{m1}\\ -\frac{\partial Z_{m1}}{\partial y}\\ \frac{\partial Z_{m1}}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1, & x_{m1}, & y_{m1}, & x_{m1}^2, & y_{m1}^2, & \sim\sim & ,x_{m1}^4y_{m1}^2, & x_{m1}^5y_{m1}\\ 0, & 0, & -1, & 0, & -2y_{m1}, & \sim\sim & ,-2x_{m1}^4y_{m1}, & -x_{m1}^5\\ 0, & 1, & 0, & 2x_{m1}, & 0, & \sim\sim & ,4x_{m1}^3y_{m1}^2, & 5x_{m1}^4y_{m1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ \wr\\ a_{27}\end{Bmatrix}=[C_1]\{A\}$$

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}\delta_{m1}\\ \wr\\ \delta_{m9}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\\ \wr\\ C_9\end{bmatrix}\{A\}=[C]\{A\}\qquad\therefore\ \{A\}=[C^{-1}]\{\delta\}$$

$$\{\alpha_{nx}\}=[1,x,y,x^2,y^2,\sim\sim,x^4y,x^5y]\begin{Bmatrix}b_1\\ \wr\\ b_{27}\end{Bmatrix}=[P]\{B\}$$

$$\{\alpha_{nm}\}=[C]\{B\}\qquad\therefore\ \{B\}=[C^{-1}]\{\alpha_{nm}\}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ Z_{nm}=&-\frac{\rho t}{g}\iint[\alpha_{nm}^{z}]^T[C^{-1}]^T[P]^T[P][C^{-1}]\{\ddot{Z}\}\,dx\,dy\\ &+\frac{\rho t^3}{12g}\iint[\alpha_{nm}^{\theta x}]^T[C^{-1}]^T[P]^T[P][C^{-1}]\left\{\frac{\partial\ddot{Z}}{\partial y}\right\}dx\,dy\\ &-\frac{\rho t^3}{12g}\iint[\alpha_{nm}^{\theta y}]^T[C^{-1}]^T[P]^T[P][C^{-1}]\left\{\frac{\partial\ddot{Z}}{\partial x}\right\}dx\,dy\ +F\alpha_{nx}^{z}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \{Z\}=-\frac{\rho t}{g}\iint[\alpha_n]^T[C^{-1}]^T[P]^T[P][C^{-1}]\begin{Bmatrix}\ddot{Z}\\ -\frac{\partial\ddot{Z}}{\partial y}\\ \frac{\partial\ddot{Z}}{\partial x}\end{Bmatrix}[T]\,dx\,dy+F\alpha_{nx}^{z}$$

但し　$[T_1]=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \frac{t^2}{12} & \\ & & \frac{t^2}{12}\end{bmatrix}$，$[T]=\begin{bmatrix}T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_9\end{bmatrix}$

3. 数値計算例

講演時発表の予定である。

4. 参考文献

(1) 主に，O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung：“The Finite Element Method in Structural and Continium Mechanics” Mc Gaw Mill, 1967

(2) 小坪，川人，高西 “代表点法による弾性連続体の固有値計算法” 九大工学集報 Vol. 43, No. 5