

長崎大学 工学部 高橋和雄

九州大学 工学部 櫻木 武

1. 緒言 軽構造において用いられる薄板の動的問題では、曲げに対する剛性が低いために、振幅の影響を無視することができない。すなわち、本題に対して幾何学的非線形の影響を考慮するとき取扱いが必要となるが、かかる場合には運動方程式に非線形項が含まれるために数学的取扱いが困難となり、今後の研究にまつところが大きい。本研究では、周辺固定矩形板の非線形自由振動問題を対象に、ガラーキン法による高精度解析法を提案するものである。すなわち、従来の研究では板の振動波形を直角＝方向のはりの座屈波形により近似する方法がとられているが、非線形振動では面内力として圧縮力よりも引張力が生ずるものと考えられるので、座屈波形を用いるには問題がありガラーキン法の性質から高精度な解を期待することができなかつたであろう。そこで、著者は前述の座屈波形の代りに一定軸力下にあるはりの曲げ振動の標準関数を用いる方法と提案し、本問題のより厳密な解析を行なわんとするものである。

2. 解法 薄板の最低次の曲げ振動を対象とすれば、板の面内方向の慣性力、剪断変形および回転慣性の影響は無視でき、また板の歪エネルギーの第2不変量と無視すれば、本題の運動方程式は板の有限変形に関する Berger の式²⁾にたわみによる慣性力を加えた次式で表わされる。

$$L(w) = \nabla^2 w - \frac{1}{D} \nabla^2 w + \rho g \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{N_x^2}{12D} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2)$$

ここに、 $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ 、 x, y : 直交座標系、 h : 板厚、 ρ : 板の密度、 $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$: 板剛度、 E : 弾性係数、 u, v : 板の x, y 方向の面内変位、 N_x, N_y : 板の x, y 方向の面内力、 ν : 板のポアソン比、 t : 時間、 w : 板のたわみ、 N : 定数

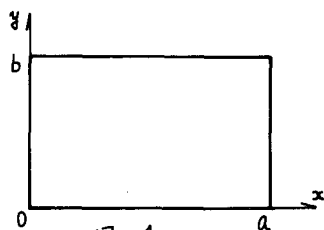


図-1

板の諸元および座標系を図-1に示すように定めるものとし、板は全周辺において固定されかつ面内変位が拘束されているものとする。次のような境界条件式がえられる。

$$x=0, a \text{ で } w=0, \frac{\partial w}{\partial x}=0, u=0, \quad y=0, b \text{ で } w=0, \frac{\partial w}{\partial y}=0, v=0 \quad (3)$$

式(2)を板面全領域にわたって積分すれば次式がえられる。

$$\frac{N_x^2}{12D} ab = \int_0^b |u|_0^2 dy + \int_0^a |v|_0^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b |w \frac{\partial w}{\partial x}|_0^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b |w \frac{\partial w}{\partial y}|_0^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b w (\nabla^2 w) dx dy \quad (4)$$

ここで、式(3)の境界条件を考慮すれば、式(4)の右辺第1項から第4項まではすべて零となるゆえ、結局次式がえられる。

$$\frac{N_x^2}{12D} ab = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b w (\nabla^2 w) dx dy \quad (5)$$

式(1)および式(5)の近似解をうるために、板を1自由度系とみなして、 w を次のように仮定する。

$$w = C X(x) Y(y) F(t) \quad (6) \quad \text{ここに、} C: \text{振幅、} X(x): x \text{ のみの関数、} Y(y): y \text{ のみの関数、} F(t): \text{未知の時間関数}$$

式(6)の $X(x)$ として一定軸力を受けるはりの線形曲げ振動の標準関数を用いることにすれば、 $X(x)$ を決定するための基礎微分方程式が次のように与えられる。

$$EI \frac{d^4 X}{dx^4} + P_0 \frac{d^2 X}{dx^2} - \rho h \omega^2 X = 0 \quad (7) \quad \text{ここに、} I = h^3/12: \text{はりの慣性モーメント、} \omega: \text{はりの固有円振動数、}$$

また、 $\frac{P_0^2}{E_1} = -6 \frac{a^2}{\lambda^2} \int_0^a X^2 dx$ (8) あるいは、 P_0 は作用する一定軸力で、本論文では最大たねみに対応する軸方向引張力を用いることにする（圧縮は正）、式(7)を解けば、 $X(x)$ が次のようにえられる。

$$X(x) = A_x \cosh \lambda x + B_x \sinh \lambda x + C_x \cos kx + D_x \sin kx \quad (9) \quad \text{ここに、} \lambda x = \sqrt{g/2 + \sqrt{g^2 + k^2}}/2, \quad kx = \sqrt{g/2 + \sqrt{g^2 + k^2}}/2$$

$$g_x = \frac{P_0^2}{E_1}, \quad k_x = a \sqrt{\frac{P_0^2}{E_1} - 1}, \quad A_x, B_x, C_x, D_x: \text{最大たねみ} \delta_1 \text{となるように決められる積分定数}$$

式(8)の固有値数は次のような一定軸力を受けるはりの動力学的連モーメント式を用いて求められる³⁾

$$M_{11} \{ \delta_1 (1 + f_{3,1} + f_{3,1}) + M_{11} \{ \delta_1 (2 + f_{3,1} + f_{3,1}) + \delta_{11} (2 + f_{3,11} + f_{3,11}) \} + M_{11} \delta_{11} (1 + f_{3,11} + f_{3,11}) = 0 \quad (10)$$

$$\text{ここに、} f_{3,1} = k_1^2 / (\lambda_1^2 + k_1^2) \{ (-6\lambda_1 \cosh \lambda_1 - \lambda_1^2 + 6) / \lambda_1^2 + (6\lambda_1 \cosh k_1 - k_1^2 - 6) / k_1^2 \}, \quad f_{3,11} = k_1^2 / (\lambda_1^2 + k_1^2) \{ (6\lambda_1 \cosh \lambda_1 - 2\lambda_1^2 - 6) / \lambda_1^2 + (6\lambda_1 \cosh k_1 + 2k_1^2 - 6) / k_1^2 \}, \quad f_{3,11} = g_1 / (\lambda_1^2 + k_1^2) \{ (6\lambda_1 \cosh \lambda_1 + \lambda_1^2 - 6) / \lambda_1^2 + (6\lambda_1 \cosh k_1 - k_1^2 - 6) / k_1^2 \}, \quad f_{3,11} = g_1 / (\lambda_1^2 + k_1^2) \{ (-6\lambda_1 \cosh \lambda_1 + 2\lambda_1^2 + 6) / \lambda_1^2 + (6\lambda_1 \cosh k_1 + 2k_1^2 - 6) / k_1^2 \}$$

式(8)から仕免の振幅比 δ_1 に対する軸力 $\frac{P_0^2}{E_1}$ が算定されるが、右辺に含まれる規準関数の積分値が未知である。このため、積分値を適当に仮定して、式(10)から固有値数を求め、さらにえられた数および仮定した $\frac{P_0^2}{E_1}$ を用いて式(9)の規準関数を求め、この結果を再び式(8)に代入して軸力 $\frac{P_0^2}{E_1}$ を求める。以下、同様の計算を繰返せば、 $\frac{P_0^2}{E_1}$ が一定値に収束することになり、規準関数 $X(x)$ が決定できることになる。以下について全く同様である。式(5)および式(6)を式(1)に代入して、ガウーキン法を適用すれば次式となる。

$$\int_0^a \int_0^b L(w) X w Y w \, dx \, dy = 0 \quad (11) \quad \text{これは次のような時間関数下に関する非線形常微分方程式となる。}$$

$$\ddot{F} + \frac{f_1}{f_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} F + 6 \frac{f_1}{f_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} F^3 = 0 \quad (12) \quad \text{ここに、} f_1 = \int_0^1 X^2 X \, dx \int_0^1 Y^2 \, dy + \frac{2}{\mu} \int_0^1 X^2 X \, dx \int_0^1 Y^2 \, dy + \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 X^2 \, dx \int_0^1 Y^2 \, dy, \\ f_2 = \int_0^1 X^2 \, dx \int_0^1 Y^2 \, dy, \quad f_3 = \int_0^1 X^2 \, dx \int_0^1 Y^2 \, dy + \frac{1}{\mu} \int_0^1 X^2 \, dx \int_0^1 Y^2 \, dy, \quad \mu = b/a$$

いま、初期条件と $w(x, y, 0) = C X(x) Y(y)$, $\dot{w}(x, y, 0) = 0$ とすれば、 F に関して次のように表わされる。

$$F(0) = 1, \quad \dot{F}(0) = 0 \quad (13) \quad \text{式(13)の初期条件のもとに式(12)を解けば、Jacobiの楕円関数における関数} cn \text{で与えられることになり、次のように求められる。}$$

$$F = cn \left(t \sqrt{\frac{f_1}{f_2} + 6 \frac{f_1}{f_2} \frac{\partial}{\partial \alpha}}, \quad 1/\sqrt{2 + f_1/(3\mu^2 g)} \right) \quad (14)$$

関数 cn は $4K$ の基本周期をもつものであり、これより振動数 n^* が次式で与えられることになる。

$$n^* = \sqrt{\frac{f_1}{f_2} + 6 \frac{f_1}{f_2} \frac{\partial}{\partial \alpha}} / 4K \quad (15) \quad \text{ここに、} K = \int_0^{2\pi} d\phi / \sqrt{1 - \sin^2 \phi (2 + \frac{f_1}{3\mu^2 g})} \quad (\text{第1種完全楕円積分})$$

式(15)の振動数 n^* と矩形板の線形振動数 $n_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f_1}{f_2} \frac{\partial}{\partial \alpha}}$ との比を求めれば、振動数に及ぼすパラメータを無次元化することができ、次式がえられる。

$$n^*/n_0 = \frac{\pi}{2K} \sqrt{1 + 6 \frac{f_1}{f_2} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \quad (16)$$

3. 計算例および結論 正方形板の線形振動数 n_0 を用いた曲片振動に由来する基準関数を用いてガウーキン法と適用のうえ算出すれば、 $n_0 = 36.1/\alpha \sqrt{D/\rho h}$ がえられる。また、座屈波形を用いた場合には $37.22/\alpha \sqrt{D/\rho h}$ となる。これら両近似解と数値値 $35.99/\alpha \sqrt{D/\rho h}$ とを比較するとき、前者の精度が極めて高いことがわかり、著者の提案の妥当性が理解できるとある。非線形自由振動数の演算結果およびKármánの有限変形理論による結果との比較については講演時に発表の予定である。

参考文献

- (1) N. Yamaki; Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates, ZAMM, Vol.41 (1961)
- (2) H.M. Benger; A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates, J. Appl. Mech., Vol.22 (1955)
- (3) 山崎・高橋; 連続ばりの非線形自由振動, 九大工学集報, 第42巻第6号 (1970)