I－8　　はりの動的弾塑性応答理論

宮崎大学工学部　正　員　太田　俊昭
〃　　〃　彦坂　良次
〃　　学生員○松本　哲二
〃　　〃　野田　健二

1.序言　本研究は、軸力と曲げの変動くり返し荷重を受ける鋼構造物の弾塑性応答理論の体系的確立を目的とし、その第1段階として、基礎理論の提案と精度ならびに収束性の吟味を行ない、説明に最も適した静定ばりを対象に選んで、他解法との比較検討を試みたものである。なお、はりを実体に促した連続体と考え、運動に関する微分方程式の数値解析には線形加速度法を採用した。

2.解析理論　長さℓ、質量mの図-1に示すはりが動的分布外力gを受けて、弾塑性変形を生じたと仮定する。この時の、はりの垂直方向のたわみをyとし、材端Aに働く水平反力をN_Aとすれば、はりに生ずる曲げモーメントは、慣性力$p=-m\ddot{y}$の影響を考慮して次式で表わされる(図-1参照)

$$M=-\iint(p+g)\,dx^2-N_A(y_B-y) \qquad \text{---(1)}$$

ここで、はりを軸方向にn等分割して、分割点j($j=0,1,2\cdots n+1$)のM, Pおよびgをそれぞれ、M_j, P_jおよびg_jとする。これらのM_j、P_jおよびg_jのうち、独立した諸量を一括して、それぞれ列ベクトル、$\mathbf{M}$、$\mathbf{P}$および$\mathbf{g}$で表わせば次式がえられる。

$$\mathbf{M}=(\boldsymbol{\alpha}_p\mathbf{P}+\boldsymbol{\alpha}_g\mathbf{g})\ell^2-N_A\boldsymbol{\beta}\mathbf{y}\,,\quad \mathbf{P}=-\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} \qquad \text{---(2)}$$

ここで$\mathbf{M}$をM_yで無次元化すれば次式をえる。

$$\bar{\mathbf{M}}=K(-\boldsymbol{\alpha}_p\bar{\mathbf{m}}\ddot{\bar{\mathbf{y}}}+\boldsymbol{\alpha}_g\bar{\mathbf{g}})-\gamma_A\boldsymbol{\beta}\bar{\mathbf{y}} \qquad \text{---(3)}$$

ただし、$K=m_s\alpha_s\ell^2/M_y$, $\bar{\mathbf{g}}=\mathbf{g}/m_s\alpha_s$, $\gamma_A=y_sN_A/M_Y$, $\bar{\mathbf{m}}=\mathbf{m}/m_s$, $\ddot{\bar{\mathbf{y}}}=\ddot{\mathbf{y}}/\alpha_s$,

M_y:動的降伏モーメント,　m_s,α_s:基準とする質量および加速度。

次に任意点xのたわみyは、ϕ-法公式より、$y=x\theta_A-\int_0^x\phi(x-s)\,ds$で表わされるゆえ、これを各分割点で一括すれば、結局次のように行列表示される。

$$\mathbf{y}=\ell^2\mathbf{a}\boldsymbol{\phi} \qquad \text{ただし}\ \mathbf{a}\text{:分割数によって定まる係数行列。} \qquad \text{---(4)}$$

いま、はりの固有円振動数をω_0とし、式(4)を静的たわみ$y_s=\alpha_s/\omega_0^2$で無次元化すれば、$\mathbf{y}/y_s=\bar{\mathbf{y}}$とおいて次式をえる。

$$\bar{\mathbf{y}}=\eta\mathbf{a}\bar{\boldsymbol{\phi}} \qquad \therefore\ \bar{\boldsymbol{\phi}}=\mathbf{a}^{-1}\bar{\mathbf{y}}/\eta \qquad \text{ただし}\ \eta=\phi_y\ell^2/y_s=M_y\ell^2/EIy_s\,,\ \bar{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\phi}/\phi_y \qquad \text{---(5)}$$

ここで弾性曲率を$\boldsymbol{\phi}^e$とし、塑性曲率を$\boldsymbol{\phi}^p$とすれば[1]、曲率$\boldsymbol{\phi}$は次のように表わされる。

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}=\bar{\boldsymbol{\phi}}^e+\bar{\boldsymbol{\phi}}^p\ (=\bar{\mathbf{M}}+\bar{\boldsymbol{\phi}}_p) \qquad \text{---(6)}$$

したがって式(5)は次式のようになる。

$$\bar{\mathbf{y}}=\eta\mathbf{a}(\bar{\mathbf{M}}+\bar{\boldsymbol{\phi}}^p)$$

上式に式(3)を代入して$\ddot{\bar{\mathbf{y}}}$について解き、$\mathbf{K}_p=\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}_p\mathbf{m}$, $\mathbf{K}_g=\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}_g$, $\mathbf{A}=\mathbf{K}_p^{-1}\boldsymbol{\beta}'$, $\mathbf{B}=\mathbf{K}_p^{-1}$, $\mathbf{C}=\mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{a}\bar{\boldsymbol{\phi}}$, $\zeta=\eta K$, $\boldsymbol{\beta}'=\mathbf{I}+\eta\gamma_A\mathbf{a}\boldsymbol{\beta}$とすれば次のようになる。ただし$\mathbf{I}$は単位行列。

$$\ddot{\bar{\mathbf{y}}}=-\frac{1}{\zeta}\mathbf{A}\bar{\mathbf{y}}+\mathbf{B}\bar{\mathbf{g}}+\frac{1}{K}\mathbf{C} \qquad \text{---(7)}$$

いま時刻iのたわみ、速度および加速度を、それぞれy_i, v_iおよびα_iで表わし、それぞれy_s, $v_s=y_s/\omega_0$, α_sで無次元化すれば次式をえる。

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_{i+1} &= \bar{y}_i + 2\pi\bar{\tau}_0\bar{v}_i + \tfrac{4}{3}\pi^2\bar{\tau}_0^2\bar{\alpha}_i + \tfrac{2}{3}\pi^2\bar{\tau}_0^2\bar{\alpha}_{i+1}\\ \bar{v}_{i+1} &= \bar{v}_i + \pi\bar{\tau}_0\bar{\alpha}_i + \pi\bar{\tau}_0\bar{\alpha}_{i+1}\ ,\ \bar{\tau}_0 = \tau_0/T_0\ ,\ \tau_0\text{：時間々隔},\ T_0\text{：固有周期}\end{aligned}\right\}\quad ---(8)$$

ここで、$D = I + (2\pi^2\bar{\tau}_0^2/3\varphi)A$ とおき、加速度 $\bar{\alpha}_{i+1}$ を求めれば式(7),(8)から

$$\bar{\alpha}_{i+1} = -\tfrac{1}{3\varphi}D^{-1}A\left(\bar{y}_i + 2\pi\bar{\tau}_0\bar{v}_i + \tfrac{4}{3}\pi^2\bar{\tau}_0^2\bar{\alpha}_i\right) + D^{-1}B\bar{g}_{i+1} + \tfrac{1}{\varphi}D^{-1}C_{i+1} \quad ---(9)$$

以上より、いわゆる、*method of numerical forward-step integration in time* によって、任意の変動荷重に対するはりの動的弾塑性応答を一般的に解明する事が可能となる。

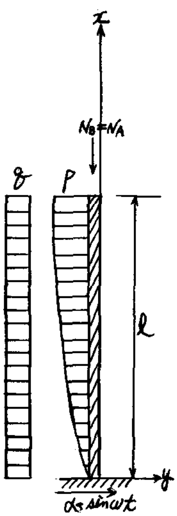
3.例題　以上の理論によって、$N_A = 0.4N_Y$, $g = \alpha_s \sin\omega t$ の外力を受ける片持梁の弾塑性応答を解析し、結果の一部を図-2, 3 に示す。

ただし、断面諸量は以下の通りである。

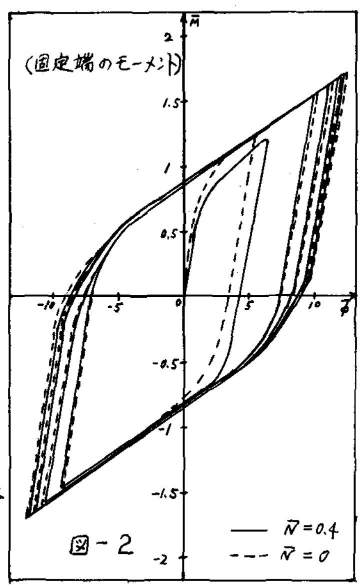
$EI = 1.75\times10^8\ \mathrm{kg/cm^2}$ 、$l = 22\ \mathrm{cm}$ 、$m = 7.89\ \mathrm{g.w/cm}$ 、$\bar{\tau}_0 = 10^{-3}$ 、$n = 4$ 、$\alpha_s = 1.0$

$$a = \frac{1}{96}\begin{pmatrix}2&1&0&0\\5&6&1&0\\8&12&6&1\\11&18&12&6\end{pmatrix},\quad a_p = \frac{1}{96}\begin{pmatrix}6&12&8&11\\1&6&12&18\\0&1&6&5\\0&0&1&2\end{pmatrix},\quad a_g = \begin{pmatrix}\frac{1}{96}\\0\\0\\0\end{pmatrix}\alpha_p,\quad \beta = \begin{pmatrix}1+X&0&0&-3X\\6X&1+X&0&-12X\\12X&6X&1+X&-27X\\18X&12X&6X&1-47X\end{pmatrix}$$

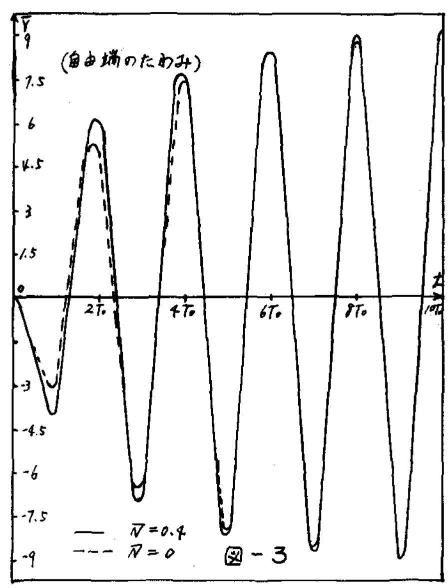
$$X = 3600\times 2l^2\bar{N}/(6\times16\times2EI) = 37.5\,l^2\bar{N}/EI\ ,\qquad \bar{N} = N_A/N_Y\ 。$$



図－1



図－2



図－3

4.結語　本研究によって、軸力とまげの変動組合せ負荷を受けるはりの弾塑性応答理論が確立された。本法の特色は、(1)分布荷重の概念を導入していること、(2)直接、応力とひずみの履歴曲線に基づいていること、(3)軸力とまげの任意の履歴負荷に応用しうること、(4)他種構造にも拡張応用しうること、等々である。なお本研究に当っては、小坪九大教授および黒木福大助教授の示唆を受けた、ここに記して感謝致します。

(参考文献)(1) T.Ohta and T.Yamasaki「Proc. of JSCE」Oct. 1971 (2) T.Ohta「変動荷重を受けるはりの動的弾塑性解析」第18回橋梁構造工学研究発表会論文集 1971年12月 (3) 小坪.高西.川人「第25回土木学会年次学術講演会講演集」1970年11月