I－3　　　　　残留応力の影響を考慮したはりの弾塑性安定問題解析

宮崎大学工学部　　正　員　太田俊昭
〃　　〃　　○学生員　岡田義美

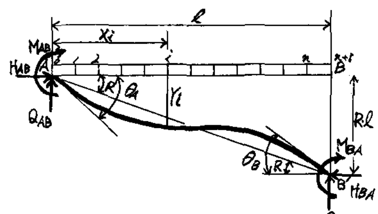
I　まえがき　　先に 著者らは、軸力と曲げモーメントを受ける静定ばりを対象にしてその安定性を検討した結果、部材固有の残留応力を無視して設計することは、極めて危険であることを確認した。続いて本論では、同理論を不静定ばりに応用して その弾塑性安定問題を論じたうえで、残留応力の及ぼす耐力の低減効果について定量的に把握せんと試みたものである。

II　安定問題の基礎式とその応用

任意の軸力と曲げモーメントの組み合せ負荷を受ける図－1の直線部材ABをn等分割すれば、一般に分割点iのモーメントは、図－1の記号を用いて

$$M_i = M_{AB} + Q_{AB} X_i + H_{AB} Y_i + M_i^0 \qquad \text{-------- (1)}$$

ここで、$Q_{AB} = -(M_{AB} + M_{BA} + H_{AB} R\ell)/\ell$ ------- (2)



図－1

式(1)に式(2)を代入して、降伏曲げモーメントM_Yで無次元化すれば

$$\bar{M}_i = (1-\bar{X}_i)\bar{M}_{AB} + (-\bar{X}_i)\bar{M}_{BA} + \gamma_0(-\bar{X}_i)\bar{H}_{AB} + \gamma_0 \bar{Y}_i \cdot \bar{H}_{AB} + \bar{M}_i^0 \qquad \text{------------- (3)}$$

ただし、$\bar{M}_i = M_i/M_Y$, $\bar{X}_i = X_i/\ell$, $\bar{M}_{AB} = M_{AB}/M_Y$, $\bar{M}_{BA} = M_{BA}/M_Y$, $\bar{Y}_i = Y_i/\ell$, $\gamma_0 = N_Y \cdot \ell / M_Y$, $\bar{M}_i^0 = M_i^0/M_Y$, $\bar{H}_{AB} = H_{AB}/N_Y$

M_i^0：中間荷重によるi点のモーメント，N_Y：降伏軸力。

式(3)を行列表示すれば、一般に次の式で与えられる。

$$[\bar{M}] = (1-[\bar{X}])\bar{M}_{AB} + [-\bar{X}]\bar{M}_{BA} + \gamma_0 \bar{H}_{AB}[-\bar{X}] + \gamma_0 \bar{H}_{AB}[\bar{Y}] + [\bar{M}^0] \qquad \text{------------- (4)}$$

部材ABに貯えられる補正エネルギーU^*は、次のように表わされる。

$$U^* = \iint \phi \, dM dS \qquad \text{------------- (5)}$$

AB部材の回転角θ_A, θ_Bは、式(5)に変分原理を適用して

$$\theta_A - R = \frac{\partial U^*}{\partial M_{AB}} = \omega \int_A^B \bar{\Phi}(1-\bar{X})\,d\bar{X}$$

$$\theta_B - R = \frac{\partial U^*}{\partial M_{BA}} = \omega \int_A^B \bar{\Phi}(-\bar{X})\,d\bar{X}$$　　ここに、$\omega = \phi_Y \ell$, $\bar{\Phi} = \phi/\phi_Y$, ϕ_Y：降伏曲率。

上式を行列表示すれば

$$\left.\begin{aligned} \theta_A - R &= \omega[a][\bar{\Phi}] \\ \theta_B - R &= \omega[b][\bar{\Phi}] \end{aligned}\right\} \qquad \text{------------ (6)}$$

ここに，[a]，[b] は，n次の raw matrix。

次に、垂直変位Y_iは、中一法公式によって次式で与えられる。

$$Y_i = X_i \theta_A - \int_0^X \phi(X_i - X)\,dX + Y_0 \qquad \text{------------ (7)}$$

式(7)を変形して

$$[Y] = [X]\theta_A - \omega[\alpha][\bar{\Phi}] + [Y_0]$$　　[α]は，n次の正方行列。 -------------- (8)

以上、誘導した式(1)～式(8)を、図－2に示めす2スパン連続梁（$P = KH_0/\ell$ の等分布荷重と軸力H_0を同時に受ける）に応用すれば，以下のとおりである。

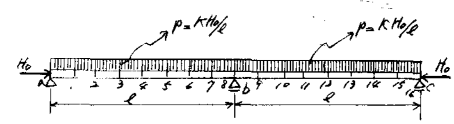
まず、部材を8等分し、かつ桁断面（矩形）を6等分したうえで、図－2の記号を採用すれば、対称条件及び境界条件により

$M_{ab}=\theta_b=R=0$

よって式(4)は

$$[\overline{M}]=-[\overline{X}]\overline{M}_{ba}+[\overline{P}]\cdot\overline{H}_0^*+K[\overline{M}^\circ] \quad \text{------------} \quad (9)$$

ただし、$\overline{H}_0^*=\gamma_0\overline{H}_0$，$\overline{M}^\circ=\overline{H}_0^*(\overline{X}-\overline{X}^2)/2$ 。



図－2

一方、式(6)は

$$\theta_a=w[a][\varphi]=[42\ 36\ 30\ 24\ 18\ 12\ 6\ 1\ ](w\lambda^2/6)[\varphi] \quad \text{------------} \quad (10)$$

$$\theta_b=w[b][\varphi]=[\ 6\ 12\ 18\ 24\ 30\ 36\ 42\ 23\ ](w\lambda^2/6)[\varphi]=0 \quad \text{ただし、}\lambda=1/8 \quad \text{------------} \quad (11)$$

また、式(8)は

$$[\overline{P}]=[\overline{X}]\theta_a-w[\alpha][\varphi] \quad \text{------------} \quad (12)$$

ここに、
$$[\overline{X}]=\begin{bmatrix}1/8\\2/8\\3/8\\4/8\\5/8\\6/8\\7/8\\8/8\end{bmatrix} \qquad [\alpha]=\lambda^2/6\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\6&1&0&0&0&0&0&0\\12&6&1&0&0&0&0&0\\18&12&6&1&0&0&0&0\\24&18&12&6&1&0&0&0\\30&24&18&12&6&1&0&0\\36&30&24&18&12&6&1&0\\42&36&30&24&18&12&6&1\end{bmatrix}$$

さて、塑性理論によれば、各分割点における曲率φは、一般に次のように表わされる。

$$[\varphi]=[\overline{M}]+[\xi] \quad \text{------------} \quad (13)$$

ただし、$[\xi]$：塑性曲率ベクトル。

式(13)に，式(9)，式(12)を代入して、$[\varphi]$について解けば

$$[\varphi]=-[\overline{X}^*]\overline{M}_{ba}+[\overline{X}^*]\theta_a\overline{H}_0^*+K[\overline{M}^*]+[\xi^*] \quad \text{------------} \quad (14)$$

ただし、$[\zeta]=\mathbf{I}+w[\alpha]\overline{H}_0^*$，$[\overline{X}^*]=[\zeta]^{-1}[\overline{X}]$，$[\overline{M}^*]=[\zeta]^{-1}[\overline{M}^\circ]$，$[\xi^*]=[\zeta]^{-1}[\xi]$，

　　$\mathbf{I}$：単位行列。

式(11)に、式(14)を代入して、$\overline{M}_{ba}$について解けば

$$\overline{M}_{ba}=\frac{1}{[b][\overline{X}^*]}\left\{[b][\overline{X}^*]\cdot\theta_a\cdot\overline{H}_0^*+K[b][\overline{M}^*]+[b][\xi^*]\right\} \quad \text{------------} \quad (15)$$

同様に、式(10)に、式(14)と式(15)を代入し、θ_aについて解けば、以下のとおりである。

$$\theta_a=Kw\cdot\left\{[a]-\frac{[a][\overline{X}^*]}{[b][\overline{X}^*]}[b]\right\}[\overline{M}^*]+w\left\{[a]-\frac{[a][\overline{X}^*]}{[b][\overline{X}^*]}[b]\right\}[\xi^*]$$

$$\therefore\theta_a=Kw\cdot[\mathbf{A}][\overline{M}^*]+w[\mathbf{A}][\xi^*] \quad \text{------------} \quad (16)$$

式(16)を変形して、未知数Kと与変形量θ_aとの関係式を求めれば、結局次の式をうる。

$$K=\frac{\theta_a-w[\mathbf{A}][\xi^*]}{w\overline{H}_0^*[\mathbf{A}][\overline{M}^*]} \quad \text{------------} \quad (17)$$

ただし、$[\mathbf{A}]=[a]-\dfrac{[a][\overline{X}^*]}{[b][\overline{X}^*]}[b]$，$[\widetilde{M}^*]=[\overline{M}^*]/\overline{H}_0^*$。

よって、弾塑性変形量としてθ_aを、それに対応するK値を式(17)によって計算し、K値の極大値を求めれば、それが、不安定限界荷重いわゆる終局耐力を与えることになる。さて、問題の残留応力は、式(13)の初期条件として簡単に導入することができるゆえ、任意の残留応力分布に対し、その耐力低減効果を同一演算式によって数量的に決定することが可能となる。なお、理解を容易にするため本法の応用例としては、1次不静定ばりを対象に選び、与変形量に回転角を採用したが、他構造に対しても、同様な手法で安定解析を試みることができる。その際の与変形量は、構造形式によって変位もしくは、回転角のいづれかを適宜採ればよい。

Ⅲ　参考文献

(1) T. Ohta and T. Yamasaki ; "Elasto-Plastic Analysis of Steel Structures Considering of the Effect Residual Stress and Finite Deformation," Proc. of JSCE, NO. 194, Oct. 1971

(2) 太田，菊池　；「軸力と曲げモーメントを受ける直線部材の安定に関する一考察」土木学会西部支部研究発表論文集昭和45年2月