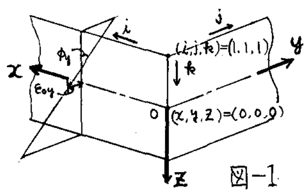
I－2　　ひずみ増分理論による板の弾塑性安定問題の解析

九州大学　正　員　　樗木　武
〃　　学生員　○崎木純治

1　緒　言　　本論文は、ひずみ増分理論を用い、塑性域の三次元的広がりをも考慮した板の弾塑性問題の一般解法を確立せんとするものである。すなわち、板は横荷重と面内力の作用を同時に受けるものとし、また、降伏条件として、Mises の条件を、降伏後の応力－ひずみ関係式として、Prandtl-Reuss の式に従う硬化弾塑性体を考慮するものとする。



図－1

2　基礎式の誘導　　板の中央面を原点として、直交座標系 (x, y, z) を図-1のように定める。このとき、ひずみは一般に次のように表わされる。　$\varepsilon_x = z\phi_x + \varepsilon_{ox}$, $\varepsilon_y = z\phi_y + \varepsilon_{oy}$, $\gamma_{xy} = z\phi_{xy} + \gamma_{oxy}$　　(1)

ここに、$\varepsilon_{ox}, \varepsilon_{oy}, \gamma_{oxy}$: $z=0$ におけるひずみ ,

$\phi_x = -[\omega(i+1,j) - 2\omega(i,j) + \omega(i-1,j)]/\delta_x^2$, $\phi_y = -[\omega(i,j+1) - 2\omega(i,j) + \omega(i-1,j)]/\delta_y^2$, $\phi_{xy} = -[\omega(i+1,j+1) - \omega(i+1,j-1) - \omega(i-1,j+1) + \omega(i-1,j-1)]/4\delta_x\delta_y$,　(2)

$\omega(i,j)$: 点 (i,j) のたわみ ,　δ_x, δ_y : x, y 方向の差分間隔

弾性域では、周知のように、$N_x = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz$, $N_y = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz$, $N_{xy} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz$　　(3)　なる三つの釣合条件式と Hooke の法則から、応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が式(4)のように算定される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \mathrm{SYM} & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z\phi_x - \frac{N_x - \nu N_y}{Eh} \\ z\phi_y - \frac{N_y - \nu N_x}{Eh} \\ z\phi_{xy} - \frac{2(1+\nu)N_{xy}}{Eh} \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

ここに、N_x, N_y, N_{xy} : 単位長さ当りの x, y 方向の軸力およびせん断力
E : ヤング率 ,　ν : ポアッソン比 ,　h : 板厚
式(4)を次のように略記する。　$\{\sigma\} = [D^e]\{\varepsilon\}$　　(5)

塑性域においては、Hooke の法則に代るものとして、Prandtl-Reuss の式がある。すなわち、応力と塑性ひずみ増分の間に、　$d\varepsilon_x^p/\sigma_x' = d\varepsilon_y^p/\sigma_y' = d\varepsilon_z^p/\sigma_z' = d\gamma_{xy}^p/\tau_{xy} = d\gamma_{yz}^p/\tau_{yz} = d\gamma_{zx}^p/\tau_{zx} = d\lambda$　　(6)

なる関係が成立する。ここに、$d\varepsilon_x^p, d\varepsilon_y^p \cdots\cdots d\gamma_{zx}^p$: ひずみ増分のうちの塑性成分 ,　$d\lambda$: 比例定数 ,
$\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z'$: 　$\sigma_x' = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$, $\sigma_y' = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$, $\sigma_z' = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$　　(7)　で定義される偏差応力。

したがって、塑性域のひずみ－応力関係式を弾性成分をも含めた形で書き表わせば、次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l} d\varepsilon_x = \sigma_x' d\lambda + d(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z)/E , \ d\varepsilon_y = \sigma_y' d\lambda + d(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z)/E , \ d\varepsilon_z = \sigma_z' d\lambda + d(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)/E \\ d\gamma_{xy} = 2\tau_{xy} d\lambda + d\tau_{xy}/G , \ d\gamma_{yz} = 2\tau_{yz} d\lambda + d\tau_{yz}/G , \ d\gamma_{zx} = 2\tau_{zx} d\lambda + d\tau_{zx}/G \end{array}\right\} \qquad (8)$$

ここに、d : 増分を表わす記号 ,　G : $G = E/2(1+\nu)$ (せん断弾性係数)

上記の式から $d\lambda$ を消去し、$d\sigma_x, d\sigma_y \cdots\cdots d\tau_{zx}$ を求めれば、必要とする応力－ひずみ増分関係式が得られることになるが、その結果は、本題の板問題に対して、次のように算定される。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{Q} \begin{bmatrix} \sigma_y'^2 + 2S & -\sigma_x'\sigma_y' + 2\nu S & -\frac{\sigma_x' + \nu\sigma_y'}{1+\nu}\tau_{xy} \\ & \sigma_x'^2 + 2S & -\frac{\sigma_y' + \nu\sigma_x'}{1+\nu}\tau_{xy} \\ & & \frac{R}{2(1+\nu)} + \frac{2H'}{9E}(1-\nu)\sigma_{eq}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

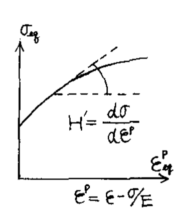
ここに、　$S = \frac{2H'}{9E}\sigma_{eq}^2 + \frac{\tau_{xy}^2}{1+\nu}$,　$Q = R + 2(1-\nu^2)S$,
$R = \sigma_x'^2 + 2\nu\sigma_x'\sigma_y' + \sigma_y'^2$,
$H' = d\sigma_{eq}/d\varepsilon_{eq}^p$,　　(10)

$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2)^{1/2}$,　(相当応力)　　(11)

$d\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(d\varepsilon_x^{p2} + d\varepsilon_y^{p2} + d\varepsilon_z^{p2} + 2d\gamma_{xy}^{p2} + 2d\gamma_{yz}^{p2} + 2d\gamma_{zx}^{p2})^{1/2}$.　(相当塑性ひずみ増分)　　(12)

また、$d\varepsilon_{eq}^p = \frac{3}{2\sigma_{eq}H'}(\sigma_x' d\sigma_x + \sigma_y' d\sigma_y + \sigma_z' d\sigma_z + 2\tau_{xy} d\tau_{xy} + 2\tau_{yz} d\tau_{yz} + 2\tau_{zx} d\tau_{zx})$　　(13)

と表わされるから、$d\sigma_x, d\sigma_y \cdots\cdots d\tau_{zx}$ が求まれば、$d\varepsilon_{eq}^p$ は算定できる。



図－2

式(9)を次のように略記する．　$\{d\sigma\} = [D^p]\{d\varepsilon\}$　(14)

式(14)が、弾性域の式(5)に対応するわけである．式(5)および、式(14)より、点(i,j,k)の応力増分は、次のように一般表示される．（添字(i,j)は省略する．）

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x^k \\ d\sigma_y^k \\ d\tau_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^k & D_{12}^k & D_{13}^k \\ D_{21}^k & D_{22}^k & D_{23}^k \\ D_{31}^k & D_{32}^k & D_{33}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x^k \\ d\varepsilon_y^k \\ d\gamma_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & D_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x^k \\ d\varepsilon_y^k \\ d\gamma_{xy}^k \end{Bmatrix} \qquad (15)$$

ここに、$[D_{ij}]^k$は、点(i,j,k)の相当応力が、弾性域にあるか、塑性域にあるかで、それぞれ次式によって定義された値をとる．

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \mathrm{SYM} & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}^k , \quad \begin{bmatrix} \frac{E}{Q}(\sigma_y'^2+2S) & \frac{E}{Q}(-\sigma_x'\sigma_y'+2\nu S) & \frac{E}{Q}\left(-\frac{\sigma_x'+\nu\sigma_y'}{1+\nu}\right)\tau_{xy} \\ & \frac{E}{Q}(\sigma_x'^2+2S) & \frac{E}{Q}\left(-\frac{\sigma_y'+\nu\sigma_x'}{1+\nu}\right)\tau_{xy} \\ \mathrm{SYM} & & \frac{E}{Q}\left[\frac{R}{2(1+\nu)}+\frac{2H'}{9E}(1-\nu)\sigma_{eq}^2\right] \end{bmatrix}^k \qquad (16)$$

ここで、$d\varepsilon_x^k, d\varepsilon_y^k, d\gamma_{xy}^k$は、式(1)より

$$d\varepsilon_x^k = Z^k d\phi_x + d\varepsilon_{ox}, \quad d\varepsilon_y^k = Z^k d\phi_y + d\varepsilon_{oy}, \quad d\gamma_{xy}^k = Z^k d\phi_{xy} + d\gamma_{oxy} \qquad (17)$$

のように得られるが、式中に含まれる$d\varepsilon_{ox}, d\varepsilon_{oy}, d\gamma_{oxy}$は断面に関する力の釣合条件式

$$dN_x = -\sum_{k=1}^{n}\frac{d\sigma_x^k+d\sigma_x^{k+1}}{2}\cdot\frac{h}{n} = -\frac{h}{2n}\sum_{k=1}^{n}(d\sigma_x^k+d\sigma_x^{k+1}), \quad dN_y = -\frac{h}{2n}\sum_{k=1}^{n}(d\sigma_y^k+d\sigma_y^{k+1}), \quad dN_{xy} = -\frac{h}{2n}\sum_{k=1}^{n}(d\tau_{xy}^k+d\tau_{xy}^{k+1}) \qquad (18)$$

より算定され、次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{ox} &= X_{10}^k + X_{11}^k d\phi_x + X_{12}^k d\phi_y + X_{13}^k d\phi_{xy} \\ d\varepsilon_{oy} &= X_{20}^k + X_{21}^k d\phi_x + X_{22}^k d\phi_y + X_{23}^k d\phi_{xy} \\ d\gamma_{oxy} &= X_{30}^k + X_{31}^k d\phi_x + X_{32}^k d\phi_y + X_{33}^k d\phi_{xy} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

式(17)，式(19)を考慮し，式(15)を書き改めると次のようになる．

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x^k \\ d\sigma_y^k \\ d\tau_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ij} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} X_{10}^k \\ X_{20}^k \\ X_{30}^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{ij} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} Z^k+X_{11}^k & X_{12}^k & X_{13}^k \\ X_{21}^k & Z^k+X_{22}^k & X_{23}^k \\ X_{31}^k & X_{32}^k & Z^k+X_{33}^k \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (20)$$

ここに、Z^k：$Z^k = -\frac{h}{2} - \frac{h}{n}(k-1)$　（k点のZの座標値），　n：板厚方向の分割数　（計算の便宜上偶数とする）

式(20)で求められた応力増分を用いれば、断面のモーメント増分$dM_x(i,j), dM_y(i,j), dM_{xy}(i,j)$が算定され、次のとおりである．

$$dM_x(i,j) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{n}\cdot\frac{d\sigma_x^k+d\sigma_x^{k+1}}{2}\right)\cdot Z_x^{kG} = \frac{h}{2n}\sum_{k=1}^{n}(d\sigma_x^k+d\sigma_x^{k+1})\cdot Z_x^{kG}, \quad dM_y(i,j) = \frac{h}{2n}\sum_{k=1}^{n}(d\sigma_y^k+d\sigma_y^{k+1})\cdot Z_y^{kG}, \quad dM_{xy}(i,j) = \frac{h}{2n}\sum_{k=1}^{n}(d\tau_{xy}^k+d\tau_{xy}^{k+1})\cdot Z_{xy}^{kG} \qquad (21)$$

ここに、Z^{kG}：$Z^{kG} = -\frac{h}{2} + \frac{h}{n}(k-1) + h\cdot(|\sigma^k| + 2|\sigma^{k+1}|)/3n\cdot(|\sigma^k|+|\sigma^{k+1}|)$

他方、横荷重Pと面内力(N_x, N_y, N_{xy})が同時に作用する場合、板の基礎微分方程式は、

$$\partial^2 M_x/\partial x^2 + \partial^2 M_y/\partial y^2 + 2\partial^2 M_{xy}/\partial x\partial y + P - N_x\cdot\partial^2 w/\partial x^2 - N_y\cdot\partial^2 w/\partial y^2 - 2N_{xy}\cdot\partial^2 w/\partial x\partial y = 0 \qquad (22)$$

のように与えられるが、この式を増分形式で表わし、かつ高次の微小項を省略のうえ差分化すれば、

$$\begin{aligned} &[dM_x(i+1,j) - 2dM_x(i,j) + dM_x(i-1,j)]/\delta_x^2 + [dM_y(i,j+1) - 2dM_y(i,j) + dM_y(i,j-1)]/\delta_y^2 + 2[dM_{xy}(i+1,j+1) - dM_{xy}(i+1,j-1) - dM_{xy}(i-1,j+1) + dM_{xy}(i-1,j-1)]/4\delta_x\delta_y + \\ &dP - N_x\cdot[dw(i+1,j) - 2dw(i,j) + dw(i-1,j)]/\delta_x^2 - N_y\cdot[dw(i,j+1) - 2dw(i,j) + dw(i,j-1)]/\delta_y^2 - 2N_{xy}[dw(i+1,j+1) - dw(i+1,j-1) - dw(i-1,j+1) + dw(i-1,j-1)]/4\delta_x\delta_y - \\ &dN_x[w(i+1,j) - 2w(i,j) + w(i-1,j)]/\delta_x^2 - dN_y[w(i,j+1) - 2w(i,j) + w(i,j-1)]/\delta_y^2 - 2dN_{xy}\cdot[w(i+1,j+1) - w(i+1,j-1) - w(i-1,j+1) - w(i-1,j-1)]/4\delta_x\delta_y = 0 \end{aligned} \qquad (23)$$

上式に式(21)を代入し、かつ$d\phi_x, d\phi_y, d\phi_{xy}$として、式(2)を増分形式で表わしたものを用いれば、本題の基礎式が、各点のたわみの増分$dw(i,j)$の関数として与えられることになる。したがって、各節点で基礎式をたて、また、境界条件を考慮すれば、たわみの増分$dw(i,j)$が求められ、さらにその結果から、曲率の増分、応力の増分および、ひずみの増分などが明らかになり、本題の逐次解析が可能になる．

（参考文献）　(1) 関谷 壮，斉藤 渥，：薄板構造力学，　共立出版

(2) 工藤英明　：　塑性学，　森北出版

(3) マトリックス構造解析法講座　：　日本鋼構造協会編

(4) 坂本紘二　：　差分法による平板の弾塑性曲げ解析，　九州大学修士論文．