IV－10　マトリクス演算による三角測量の厳密解法
―単三角鎖の平均調整計算について―

熊本大学　正員　　三池 亮次
熊本大学　正員　○星田 義治

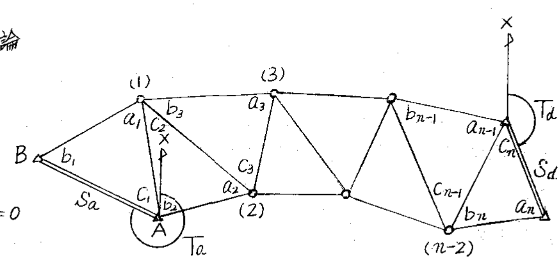
1 はしがき

三角鎖を解くには、①三角形の条件、②方向角の条件、③辺の条件、④座標の条件を同時に満足するように、最小二乗法に基づいて解くのが最も厳密な方法であるが、普通には、各条件を第1次から第4次調整に分離して解く便宜的方法によっている。

本論文では、三解鎖の厳密解法に、マトリクス演算による条件付間接測定の解法[※1)]を用いるため、座標の条件をテーラー展開を用いて線形化した。①～③の条件式については、現在まで提案されている式を用いた。ここでは、①～④の条件を同時に満足するように解き、これを便宜的解法と比較検討した。

このような、電子計算機の使用を前提とした、マトリクス演算による解法は、測量における計算の正確性、能率化という要求にとって、極めて有効な方法であると思う。

2 単三角鎖の平均調整計算理論



① 三角形の条件式

$$\varphi_i \equiv w_i + \Delta a_i + \Delta b_i + \Delta c_i = 0$$

ただし

$$w_i = a_i + b_i + c_i - 180^\circ \quad [i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n]$$

② 方向角の条件式

$$\varphi_{n+1} \equiv w_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \Delta c_i = 0$$

ただし

$$w_{n+1} = (T_a - T_d) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} c_i + 180^\circ (n-1)$$

③ 辺の条件式

$$\varphi_{n+2} \equiv w_{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta a_i - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta b_i$$

ただし

$$w_{n+2} = (\log S_d + \sum_{i=1}^{n} \log \sin a_i) - (\log S_a + \sum_{i=1}^{n} \log \sin b_i)$$

$$\alpha_i = \frac{M}{\rho} \cot a_i \quad , \quad \gamma_i = \frac{M}{\rho} \cot b_i$$

④ 座標の条件式

(i) 緯距に対して

$$\varphi_{n+3} \equiv \omega_{n+3} + \sum_{i=1}^{n} (\beta a)_i \Delta a_i - \sum_{i=1}^{n} (\beta b)_i \Delta b_i - \sum_{i=1}^{n} (\beta c)_i \Delta c_i = 0$$

(ii) 経距に対して

$$\varphi_{n+4} \equiv \omega_{n+4} + \sum_{i=1}^{n} (\delta a)_i \Delta a_i - \sum_{i=1}^{n} (\delta b)_i \Delta b_i - \sum_{i=1}^{n} (\delta c)_i \Delta c_i = 0$$

ただし

$$\omega_{n+3} = (X_c - X_a) - \sum_{i=1}^{n} P_i \quad , \quad \omega_{n+4} = (Y_c - Y_a) - \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

$$(\beta a)_i = \frac{\cos a_i}{\sin a_i} \frac{1}{\rho} \sum_{k=i}^{n} P_k \quad , \quad (\beta b)_i = \frac{\cos b_i}{\sin b_i} \frac{1}{\rho} \sum_{k=i}^{n} P_k \quad , \quad (\beta c)_i = \sum_{k=i}^{n} (-1)^i Q_k \frac{1}{\rho}$$

$$(\delta a)_i = \frac{\cos a_i}{\sin a_i} \frac{1}{\rho} \sum_{k=i}^{n} Q_k \quad , \quad (\delta b)_i = \frac{\cos b_i}{\sin b_i} \frac{1}{\rho} \sum_{k=i}^{n} Q_k \quad , \quad (\delta c)_i = \sum_{k=i}^{n} (-1)^i P_k \frac{1}{\rho}$$

$$P_i = \frac{Sa \sin b_1 \sin b_2 \cdots \sin b_i}{\sin a_1 \sin a_2 \cdots \sin a_i} \cos\left(Ta + C_1 - C_2 + \cdots + (-1)^i C_i + 180^\circ (i-1)\right)$$

$$Q_i = \frac{Sa \sin b_1 \sin b_2 \cdots \sin b_i}{\sin a_1 \sin a_2 \cdots \sin a_i} \sin\left(Ta + C_1 - C_2 + \cdots + (-1)^{i+1} C_i + 180^\circ (i-1)\right)$$

上の条件式 $(n+4)$ 個 を同時に解くとよい。

3 マトリクス演算による実例計算

マトリクス演算における $\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \mathbb{e}$ の線型回帰模型で、$\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 + \Delta\mathbb{Y}$. $\beta = \beta_1 + \Delta\beta$ とおくと、この場合は、$\mathbb{X}$ が単位マトリクスとなるから

$$\Delta\mathbb{Y} = \mathbb{X}\Delta\beta + \mathbb{e}$$

条件式は　　$\varphi \equiv \mathbb{a}_0 + \mathbb{A}\Delta\beta = 0$

となる。ここで、$\Delta\mathbb{Y}$ は観測変量、$\mathbb{X}$ は指定変数、$\Delta\beta$ は未知量、$\mathbb{e}$ は偏差で、その期待値 $E[\mathbb{e}] = 0$ であるとする。

これより、未知量の最確値、残差平方和、未知量の最確値の分散は次の(1), (2), (3)式のようになる。これらの式に、観測データー※2) を入れて電子計算機で求めた。

$$\Delta\hat{\beta} = \mathbb{S}_P^{-1} (\mathbb{X}^{(t)} \mathbb{Q} \Delta\mathbb{Y} - \mathbb{A}^{(t)} \mathbb{S}_{AP}^{-1} \mathbb{W}) \quad \text{------------(1)}$$

$$S_E = \Delta\mathbb{Y}^{(t)} \mathbb{Q} \Delta\mathbb{Y} - \Delta\hat{\beta}_0^{(t)} \mathbb{X}^{(t)} \mathbb{Q} \Delta\mathbb{Y} + \mathbb{W}^{(t)} \mathbb{S}_{AP}^{-1} \mathbb{W} \quad \text{------------(2)}$$

$$C[\Delta\hat{\beta}] = E\left[\frac{S_E}{n-(p-r)} \{ \mathbb{S}_P^{-1} - (\mathbb{A}\mathbb{S}_P^{-1})^{(t)} \mathbb{S}_{AP}^{-1} (\mathbb{A}\mathbb{S}_P^{-1}) \}\right] \quad \text{------------(3)}$$

結果及び考察は、講演時にのべる。

※1) 三池・星田：マトリクス演算による条件付間接測定の解法について（土木学会講演 45-II）

※2) 土橋：基準点測量（山海堂）　p.226 ～ p.228