

九州大学 正員 井島武士

同 正員 佐々木富雄

同 学生員 伊藤芳一

同 学生員 松尾正臣

1. はしがき

図-1に示すような海底不連続部に於ける波の反射及び通過に関しては、境界値問題として Newman (1965) は $h \rightarrow \infty$ の場合を, Miles (1967) は h が有限の場合を計算している。それは $x=0$ の不連続部での流速を未知函数として, その積分方程式を解くことにより求められている。ここでは より容易な取扱いによって理論解を導いた結果を紹介する。この報告は, この応用としての着堤効果についての研究の第一段階としての取扱い法を示すものである。

2. 理論

(i) 深海からの入射波

水深が h の部分から不連続的に gh ($1 > g > 0$) になるとき, この部分での波の反射によって 浅い部分に入る波が変る。静水面に原点を取り, $x=0$ において領域を I と II に分ける。各領域の速度ポテンシャルを夫々 $\phi_1(x, z)e^{i\omega t}$ 及び $\phi_2(x, z)e^{i\omega t}$ とすると, ϕ_1, ϕ_2 は次の形で与えられる。

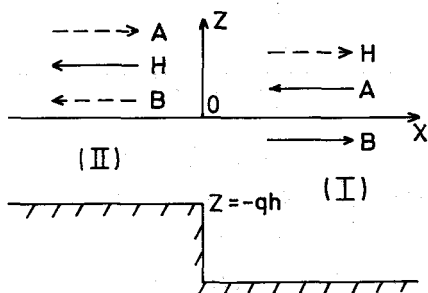


FIG-1 Definition Sketch

$$\phi_1(x, z) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx}) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-k_m x} \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \quad (1)$$

$$\phi_2(x, z) = He^{ikx} \frac{\cosh k'(z+gh)}{\cosh k'gh} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{k_n x} \frac{\cos k_n'(z+gh)}{\cos k_n' gh} \quad (2)$$

ここで A, B 及び H は夫々, 入射波, 反射波及び通過波を表わす常数で, C_m, I_n ($m=1, 2, 3, \dots$ $n=1, 2, 3, \dots$) は常数, k, k_m 及び k', k_n' は夫々次式で表される固有値である。

$$\frac{\omega^2 h}{g} = kh \tanh kh = -knh \tan kmh \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

$$\frac{\omega^2 gh}{g} = k'gh \tanh k'gh = -k_n' gh \tan k_n' gh \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

各領域の境界面 $x=0$ では次の mass flux 及び energy flux の連続性の条件が, 成立しなければならない。

$$\begin{aligned} x=0 \text{ で } \quad & \phi_1 = \phi_2 \quad (0 > z > -gh) \\ & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad (0 > z > -gh) \\ & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0 \quad (-gh > z > -h) \end{aligned} \quad (5)$$

上式に式(1), (2)を代入し $\cosh k(z+h)$, $\cos k_m(z+h)$ 及び $\cosh k'(z+gh)$, $\cos k_n'(z+gh)$ の函数系の直交性を利用すると, 係数 B, C_n, H, I_n につき, 次の関係式を

得る。

$$(1 + a_{00}b_{00} - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}b_{n0}) \frac{B}{A} - \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_{0n}b_{0n} - i \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m}b_{nm} \} \frac{C_m}{A} = 1 - a_{00}b_{00} + i \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}b_{n0} \quad (6)$$

$$(a_{00}b_{00} - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}b_{n0}) \frac{B}{A} - \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_{0n}b_{0n} - i \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m}b_{nm} \} \frac{C_n}{A} + i \frac{C_n}{A} = -(a_{00}b_{00} - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}b_{n0}) \quad (m=1, 2, 3 \dots) \quad (7)$$

$$\therefore \lambda_0 = kh, \lambda_n = kmh, \lambda'_0 = k'gh, \lambda'_n = k'gh, \bar{g} = 1 - g$$

$$a_{00} = \frac{\sinh \bar{g} \lambda_0}{N_0 \sinh \lambda_0 \cosh \lambda_0} \cdot \frac{\lambda'_0 / g \lambda_0}{(\lambda'_0 / g \lambda_0)^2 - 1}$$

$$a_{0n} = \frac{\sinh \bar{g} \lambda_0}{N_0 \sinh \lambda_0 \cosh \lambda_n} \cdot \frac{\lambda'_n / g \lambda_0}{(\lambda'_n / g \lambda_0)^2 + 1}$$

$$a_{n0} = \frac{\sinh \bar{g} \lambda_n}{N_n \sinh \lambda_n \cosh \lambda_0} \cdot \frac{\lambda'_0 / g \lambda_n}{(\lambda'_0 / g \lambda_n)^2 + 1}$$

$$a_{nn} = \frac{\sinh \bar{g} \lambda_n}{N_n \sinh \lambda_n \cosh \lambda'_n} \cdot \frac{\lambda'_n / g \lambda_n}{(\lambda'_n / g \lambda_n)^2 - 1}$$

$$b_{00} = \frac{\sinh \bar{g} \lambda_0}{N'_0 \sinh \lambda'_0 \cosh \lambda_0} \cdot \frac{\lambda'_0 / g \lambda_0}{(\lambda'_0 / g \lambda_0)^2 - 1}$$

$$b_{0n} = \frac{\sinh \bar{g} \lambda_n}{N'_0 \sinh \lambda'_0 \cosh \lambda_n} \cdot \frac{\lambda'_n / g \lambda_n}{(\lambda'_n / g \lambda_n)^2 + 1}$$

$$b_{n0} = \frac{\sinh \bar{g} \lambda_0}{N'_n \sinh \lambda'_n \cosh \lambda_0} \cdot \frac{\lambda'_0 / g \lambda_n}{(\lambda'_0 / g \lambda_n)^2 + 1}$$

$$b_{nn} = \frac{\sinh \bar{g} \lambda_n}{N'_n \sinh \lambda'_n \cosh \lambda_n} \cdot \frac{\lambda'_n / g \lambda_n}{(\lambda'_n / g \lambda_n)^2 - 1}$$

式(6),(7)は B/A 及び C_m/A に関する無限連立一次方程式である。この解を K_0, K_m ($m=1, 2, 3 \dots$) とすると

$$\frac{B}{A} = K_0$$

$$\frac{C_m}{A} = K_m$$

$$\frac{H}{A} = b_{00}(1 + K_0) - \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} K_n$$

$$\frac{I_m}{A} = -b_{n0}(1 + K_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nm} K_n$$

かくして次の結果が得られる。

(1) 反射率 K_r と透過率 K_t

$$K_r = \left| \frac{B}{A} \right| = |K_0| \quad (8) \quad K_t = \left| \frac{H}{A} \right| = |b_{00}(1 + K_0) - \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} K_n| \quad (9)$$

(2) エネルギー透過率 K_{et}

$$K_{et} = \left| \frac{H}{A} \right|^2 \frac{N'_0}{N_0} \frac{g \lambda_0}{\lambda'_0} \quad (10)$$

(3) 水面波形

入射波を $\zeta_1 = a \cos(kx - \omega t)$ とすると

$$\frac{\zeta_1}{a} = e^{i(kx + \omega t)} + K_0 e^{-i(kx - \omega t)} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-k_n x + i \omega t} \quad (11)$$

$$\frac{\zeta_2}{a} = [b_{00}(1 + K_0) - \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} K_n] e^{i(kx + \omega t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -b_{n0}(1 + K_0) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} K_m \right\} e^{k_n x + i \omega t} \quad (12)$$

(4) $x=0$ における圧力

$$\frac{P_1}{\rho g a} = (1 + K_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh k h} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh \lambda_n} \quad (0 > z > -h) \quad (13)$$

$$\frac{P_2}{\rho g a} = \frac{H}{A} \frac{\cosh k'(z+gh)}{\cosh \lambda'_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{A} \frac{\cosh k'_n(z+gh)}{\cosh \lambda'_n} \quad (0 > z > -gh) \quad (14)$$

(ii) 浅海からの反射

浅海からの入射波を A , 反射波を B , 透過波を H とすると

$$\phi_1(x, z) = H e^{-ikx} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh k h} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh k_n h} \quad (15)$$

$$\phi_2(x, z) = (A e^{-ikx} + B e^{ikx}) \frac{\cosh k'(z+gh)}{\cosh k' gh} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{k_n x} \frac{\cosh k'_n(z+gh)}{\cosh k'_n gh} \quad (16)$$

$x=0$ の条件は

$$\begin{aligned} x=0 \quad \phi_1 &= \phi_2 & (0 > z > -gh) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & (0 > z > -gh) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= 0 & (-gh > z > -h) \end{aligned} \quad (17)$$

前節と同じ取扱いを行うと

$$(1 + a_{00}b_{00} + i \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0}b_{n0}) \frac{B}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ i a_{n0}b_{n0} - \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}b_{0m} \right\} \frac{I_n}{A} = -(1 - a_{00}b_{00} - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0}b_{n0}) \quad (18)$$

$$(a_{00}b_{n0} + i \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0}b_{nm}) \frac{B}{A} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ i a_{0m}b_{n0} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}b_{nm} \right\} \frac{I_m}{A} - \frac{I_n}{A} = a_{00}b_{n0} + i \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0}b_{nm} \quad (19)$$

($m=1, 2, 3, \dots$)

上式は B/A 及び I_n/A に関する無限連立一次方程式である。この解を L_0, L_n ($n=1, 2, 3, \dots$) とすると

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= L_0 & \frac{I_n}{A} &= L_n \\ \frac{H}{A} &= a_{00}(1 - L_0) - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0}L_n \\ \frac{C_n}{A} &= -i a_{n0}(1 - L_0) - \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}L_m \end{aligned}$$

(1) 反射率 K_r と透過率 K_t

$$K_r = \left| \frac{B}{A} \right| = |L_0| \quad (20)$$

$$K_t = \left| \frac{H}{A} \right| = |a_{00}(1 - L_0) - i \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0}L_n| \quad (21)$$

(2) エネルギー-透過率 K_{et}

$$K_{et} = \left| \frac{H}{A} \right|^2 \cdot \frac{N_0}{N'_0} \cdot \frac{\eta'_0}{\eta_0} \quad (22)$$

(3) 水面波形

入射波を $\zeta_i = a \cos(kx - \omega t)$ とすると

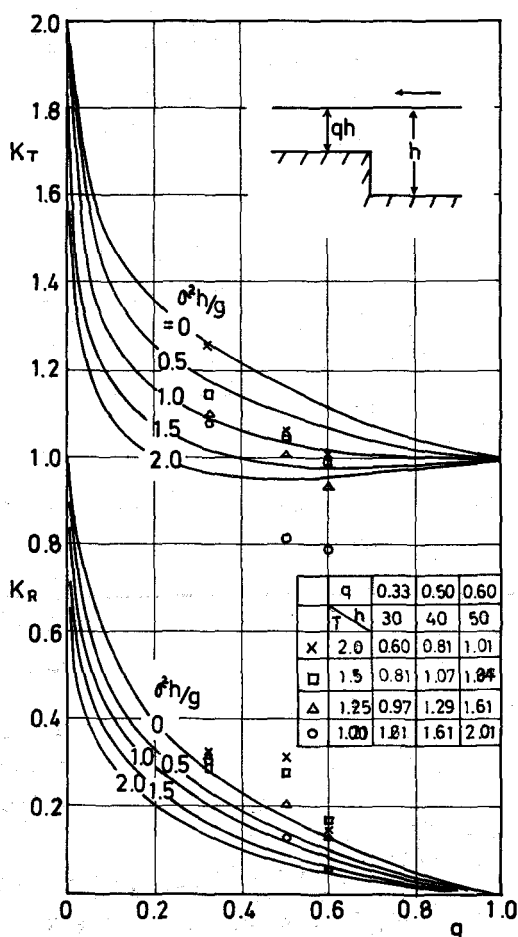
$$\frac{\zeta_2}{a} = e^{-i(kx - \omega t)} + L_0 e^{i(kx + \omega t)} + \sum_{n=1}^{\infty} L_n e^{k_n x + i\omega t} \quad (23)$$

$$\frac{\zeta_1}{a} = \frac{H}{A} e^{-i(kx - \omega t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{A} e^{-k_n x + i\omega t} \quad (24)$$

(4) $x=0$ における圧力

$$\frac{P_1}{\rho g a} = \frac{H \cosh k(z+h)}{A \cosh \eta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \cos k_n(z+h)}{A \cos \eta_n} \quad (25)$$

$$\frac{P_2}{\rho g a} = (1 + L_0) \frac{\cosh k(z+gh)}{\cosh \eta'_0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_n \frac{\cos k'_n(z+gh)}{\cos \eta'_n} \quad (26)$$



Reflection and Transmission Coef.
(from deep to shallow water)

FIG-2

(iii) 長波として取り扱うときは

$$\frac{h}{\lambda} = r, \quad \lambda_0^2 = r, \quad \lambda^2 = 8r$$

とおくことができる。このときは

$$a_{\infty} = 8^{\frac{1}{2}}, \quad b_{\infty} = 1$$

$$K_r = \left| \frac{B}{A} \right| = \left| \frac{-1 + a_{\infty} b_{\infty}}{1 + a_{\infty} b_{\infty}} \right| = \frac{1 - 8^{\frac{1}{2}}}{1 + 8^{\frac{1}{2}}} \quad (27)$$

$$K_t = \left| \frac{H}{A} \right| = \left| \frac{1 + 2a_{\infty}}{1 + a_{\infty} b_{\infty}} \right| = \frac{2 \cdot 8^{\frac{1}{2}}}{1 + 8^{\frac{1}{2}}} \quad (28)$$

$$K_{es} = \frac{4 \cdot 8^{\frac{1}{2}}}{(1 + 8^{\frac{1}{2}})^2} \quad (29)$$

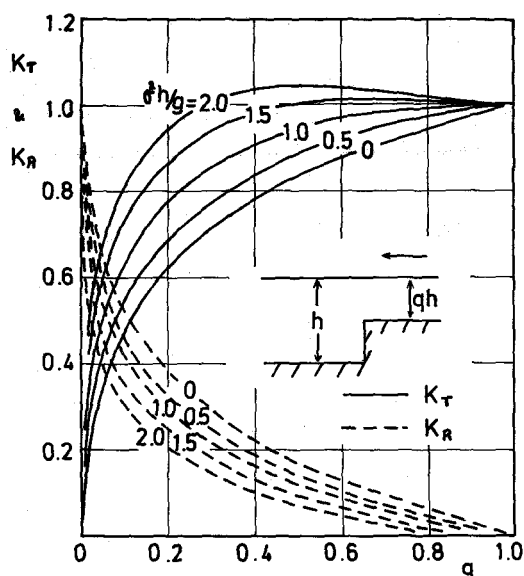
3. 計算結果

深海からの入射波に対する計算結果を図-(2)に、浅海からの入射波に対する結果を図-(3)に示す。兩國において $h/\lambda = 0$ は、長波の場合の計算値を示している。この結果はここには示していないが Newman の結果とも良く合っている。図-(2)で K_t が 1 より大きくなるのは、浅海部での波高が水深の影響を受けて大きくなる為である。

なお今後さらに実験を重ねてゆく予定であるが、図-(2)に深海からの入射波の場合の実験結果の一部を示す。

4. あとがき

この研究を第一段階として、今後この応用である蓄堤の効果に対する研究を進めてゆくつもりである。



Reflection and Transmission Coef.
(from shallow to deep water)
FIG-3

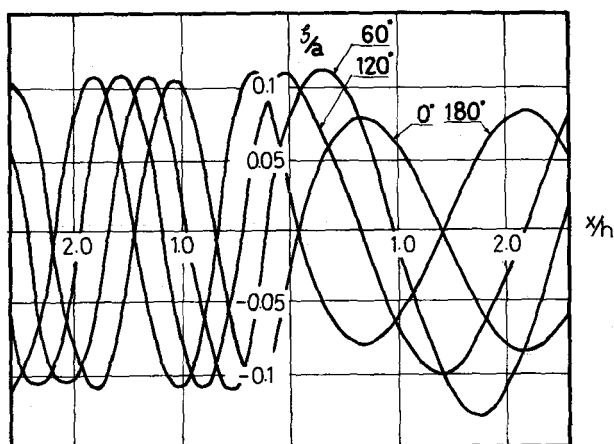


FIG-4 Surface Profile ($q=0.125$)
(from deep to shallow water)

参考文献

- 1) J. N. NEWMAN; Propagation of water waves over an infinite step, J. Fluid Mech. (1965), vol 23, part 2, pp. 399-415
- 2) MILES, J. W; 1967 Surface-wave scattering matrix for a shelf, J. Fluid Mech. 28, 755.