

九州大学工学部 正員 井島 武士

" " " 田淵 幹修

" " " 湯 村 やす

概要

著者は嘗て 水面は固定された水平板に対する波の作用を解明するの⁽¹⁾に 水面および水底条件を満足する速度ポテンシャルを求め、その任意常微分境界面の mass flux と energy flux の連続性の条件から無限連立1次方程式を解くことによって定量的方法を用いた。こゝではこの方法の拡張として 水面又は水底の一部が決つた鉛直正弦運動を行ふ場合に発生する波の性質を解明するもので、現在まで多くの実験的研究が行はれてゐる 浮体による防波堤の効果を理論的に解明するに役める方法も確定する目的の研究である。

1. 水底の鉛直運動による波の発生

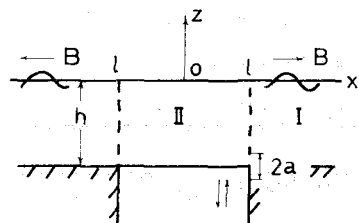


Fig.1 Definition Sketch

Fig.1 に示すように 一定水深の海域の長さ $2l$ の部分に 振幅 a frequency ω の正弦運動を行ふとき発生する波を 求めるもので 運動は原点 O に対称であるから $x = \pm l$ で 合せる流体域 I と II に分けて考える。水底部分の鉛直運動を $z = ae^{i\omega t}$ と表はすと $|x| < l$ の部分の水底 $z = -h$ での流体の鉛直速度は $dz/dt = i\omega a e^{i\omega t}$ となる。領域 I と II の速度ポテンシャルを $\phi_1(x, z)e^{i\omega t}$ および $\phi_2(x, z)e^{i\omega t}$ とすると ϕ_1 と ϕ_2 は Laplace の方程式を満足せねばならない。

$$\partial^2 \phi_i / \partial x^2 + \partial^2 \phi_i / \partial z^2 = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

之に対する水面 ($z=0$) および水底 ($z=-h$) の条件は次のようである。

(i) 領域 I ($|x| > l$)

$$z=0 \quad \partial \phi / \partial z = 0 \quad z=-h \quad \partial \phi / \partial z = 0 \quad (2)$$

(ii) 領域 II ($|x| < l$)

$$z=0 \quad \partial \phi / \partial z = \partial \phi / \partial z \quad z=-h \quad \partial \phi / \partial z = i\omega a \quad (3)$$

領域 I では $+x$ の方向に radiate する波を B, standing wave C_n として $\phi_1(x, z)$ は次式で表はされる。

$$\phi_1(x, z) = B e^{-ik(x-l)} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-kn(x-l)} \frac{\cosh kn(z+h)}{\cosh knh} \quad (4)$$

こゝで k および kn は 次式で決まる固有値である。

$$\frac{\partial^2 h}{g} = kh \tanh kh = -knh \tanh knh \quad (5)$$

領域 II では式(5)の右辺を $|x| < l$ で 7-4 級数に展開すると

$$i\omega a = 4i\omega a \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)\pi} \cos \frac{(2s+1)\pi}{2l} x \quad (s \text{ は 整数}) \quad (6)$$

であるから 式(1)と条件(4)(5)を満足する解を二次式を得られる。

$$\phi_2^{(1)}(x, z) = 2i\alpha \frac{h^2}{l} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(\mu sh)^2} \frac{\frac{\alpha h}{g} \sinh \mu s z + \mu sh \cosh \mu s z}{\frac{\alpha h}{g} \cosh \mu sh - \mu sh \sinh \mu sh} \cdot \cos \mu s x, \quad \mu s = \frac{(2s+1)\pi}{2l} \quad (9)$$

更に式(5)の代りに $\partial \phi_2 / \partial z = 0$ を満足する解を二次式(1)の一般形を次式で表はされる。

$$\phi_2^{(2)}(x, z) = (D \frac{\cosh x}{\cosh l} + E \frac{\sinh x}{\sinh l}) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \frac{\cosh knx}{\cosh knl} + G_n \frac{\sinh knx}{\sinh knl}) \frac{\cosh kn(z+h)}{\cosh knh} \quad (10)$$

故に $x=0$ の内なる現象の対称性を考慮し 式(9)と式(10) ($E \equiv G_n \equiv 0$) の和を二次 $\phi_2(x, z)$ は次式で与えられる。

$$\phi_2(x, z) = D \frac{\cosh x}{\cosh l} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\cosh knx}{\cosh knl} + 2i\alpha \frac{h^2}{l} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(\mu sh)^2} \frac{\frac{\alpha h}{g} \sinh \mu s z + \mu sh \cosh \mu s z}{\frac{\alpha h}{g} \cosh \mu sh - \mu sh \sinh \mu sh} \cdot \cos \mu s x \quad (11)$$

式(6)と式(11)で表はされる運動は $x=l$ において mass 及び energy flux の連続性から次の条件を満足せねばならぬ。即ち

$$x=l \quad \phi_1 = \phi_2, \quad \partial \phi_1 / \partial x = \partial \phi_2 / \partial x \quad (12)$$

式(6)と(11)を式に代入し二次の内任式を得る。

$$(B-D) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - F_n) \frac{\cosh kn(z+h)}{\cosh knh} = 0 \quad (13)$$

$$(B+iD \tanh kl) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} - i \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + F_n) \frac{k_n \cosh kn(z+h)}{k \cosh knh} = 2\alpha \frac{h^2}{l} \frac{1}{kh} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\mu sh} \frac{\frac{\alpha h}{g} \sinh \mu s z + \mu sh \cosh \mu s z}{\frac{\alpha h}{g} \cosh \mu sh - \mu sh \sinh \mu sh} \quad (14)$$

函数形 $\cosh k(z+h)$ と $\cosh kn(z+h)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の直交性により上式 n 対し $\int_{-h}^0 \cosh k(z+h) dz$ 及び $\int_{-h}^0 \cosh kn(z+h) dz$ の計算を行なうと係数 B, C_n, D, F_n は次のように求められる。

$$B = D = -4 \frac{\alpha g}{\sigma} \frac{\sinh \lambda_0 \sinh kl}{2\lambda_0 + \sinh 2\lambda_0} e^{-ikl}, \quad (15) \quad C_n = F_n = 4i \frac{\alpha g}{\sigma} \frac{\sinh \lambda_n \sinh knl}{2\lambda_n + \sinh 2\lambda_n} e^{-knl} \quad (16)$$

$$z=0 \quad \lambda_0 = kh, \quad \lambda_n = knh$$

かくして常数は決定され 速いおランシエは確定する。 α は実数に取る。水底部分の運動は $\zeta = a \cos \sigma t$ で表はされ、之に対して領域 I の水面波形は次式で表はされる。

$$\zeta_1(x, t) = 4\alpha \frac{\sinh kl \sinh \lambda_0}{2\lambda_0 + \sinh 2\lambda_0} \sin(kx - \sigma t) - 4\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh knl \sinh \lambda_n}{2\lambda_n + \sinh 2\lambda_n} e^{-knx} \cos \sigma t, \quad (17)$$

故に群生波(進行波)の振幅と水底運動の振幅の比(透波率) K_w は次式で表はされる。

$$K_w = \frac{4 \sinh \lambda_0}{2\lambda_0 + \sinh 2\lambda_0} \cdot \sinh kl \quad (18)$$

之は倉田(1964)⁽²⁾が他の方法で求めた結果と一致し、 $l/h = 0.5, 1.0$ 及び 2.0 について示す Fig. 2 のようである。

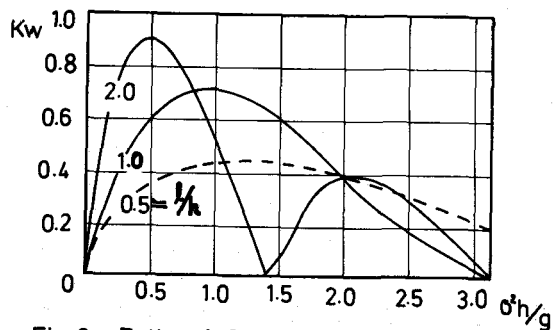


Fig. 2 Ratio of Generated Wave Amplitude to Bottom Plate Amplitude

2 水面の鉛直運動による波の発生

Fig. 3 に示すように、水面での $\zeta = ae^{i\omega t}$ で与えられる鉛直運動によって発生する波については、領域 II に対する条件は式(4)(5)の代りに次のようである。

$$z=0 \quad \partial \phi / \partial z = i a n \quad (19), \quad z=-h \quad \partial \phi / \partial z = 0 \quad (20)$$

領域Ⅰに対する速度ポテンシャル中，は式(6)と同じである。
領域Ⅱに対しては，亦々同様の考察を，次式で表はされる。

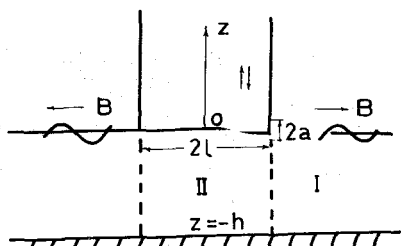


Fig. 3 Definition Sketch

$$\Phi_1(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ D_n \frac{\cosh \frac{\pi K}{h}}{\cosh \frac{\pi K}{h}} \cdot \cosh \frac{\pi K}{h} + 2i \frac{a g}{\sigma} \frac{a^2 h}{g} \frac{(-1)^n \cosh \mu_2(z+h)}{(\mu_2 h) \sinh \mu_2 h} \cosh \mu_2 z \right\} \quad (21)$$

上式と式(6)に $x=l$ における条件式(12)に代入すると

$$B \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh k_n h} = \sum_{s=0}^{\infty} D_s \cos \frac{s\pi z}{h} \quad (22)$$

$$B \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} - i \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{k_n \cosh k_n(z+h)}{k \cosh kn} = i \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{\pi}{kh} D_s \tanh \frac{\pi s l}{h} \cdot \cos \frac{\pi s z}{h} - 2i \frac{a g}{\sigma} \frac{n^2 h}{g} \frac{h}{z} \cdot \frac{\cosh \mu_s(z+h)}{kh \mu_s \sinh \mu_s h} \right\} \quad (23)$$

上式に対して亦と同様の計算を行なうと D_2/a_2 に関する次の連立1次方程式を得る。

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 - i \frac{\sqrt{\epsilon}}{\lambda_0} \tanh \frac{\sqrt{\epsilon} h}{h}}{1 + (\sqrt{\epsilon}/\lambda_0)^2} \frac{D_s}{a_2/a} = \frac{2}{\lambda_0} \frac{h}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 - \frac{\alpha_{2s}}{g} \frac{\cosh \alpha_{2s} h}{\mu_{2s} h}}{(\mu_{2s}/\lambda_0)^2 - 1} \quad (24)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 + \frac{\pi}{\lambda_n} \tanh \frac{\pi \ell}{h}}{1 - (\frac{\pi}{\lambda_n})^2} \frac{D_s}{a g / \mu} = -2i \frac{1}{\lambda_n} \frac{h}{\ell} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 - \frac{n^4 h}{\ell} \frac{\coth \mu h}{\mu h}}{(\mu h / \lambda_n)^2 + 1} \quad (25)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

上式、解を $k_0, k_1, \dots, k_s, \dots$ とすると

$$D_s = \frac{a_g}{\pi} \cdot K_s \quad (26)$$

ଜି.ଏ.ବି

$$\beta = \frac{B}{a_2 \rho_n} = \frac{1}{N_0} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{K_s}{1 + (s \frac{\pi}{\lambda_n})^2} \quad (27) \quad \gamma_n = \frac{C_n}{a_2 \rho_n} = \frac{1}{N_n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{K_s}{1 - (s \frac{\pi}{\lambda_n})^2} \quad (28)$$

$$\text{但 } N_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_0}{\sin 2\lambda_0} \right), \quad N_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_n}{\sin 2\lambda_n} \right)$$

こうして各領域の速度ポテンシャルは確定し、 α も実数とするときは $\gamma = \alpha \cos \theta$ のように領域 I の水面形状は次式の
実数部分で与えられる。

$$S(x,t) = -ia \left[\beta e^{-i(kx - \omega t - kl)} + e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-k_n(x-l)} \right] \quad (29)$$

故 12 造波率 K_w 是

$$K_w = |\beta| = \frac{1}{N_0} \left| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{K_s}{1 + (s\pi/\lambda_0)^2} \right| \quad (30)$$

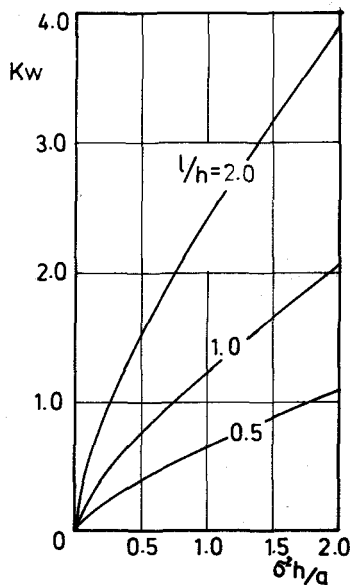


Fig.4 Ratio of Generated Wave Amplitude to Amplitude of Surface Plate

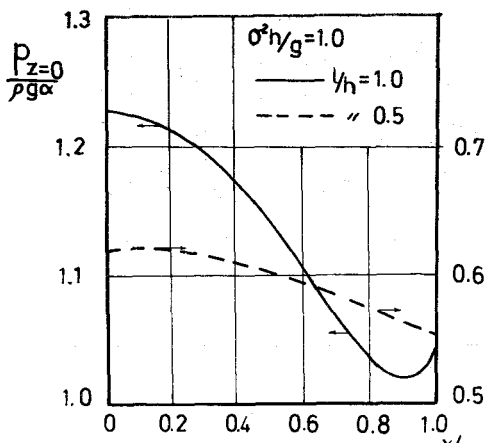


Fig. 5 Pressure Distribution x/l to Plate

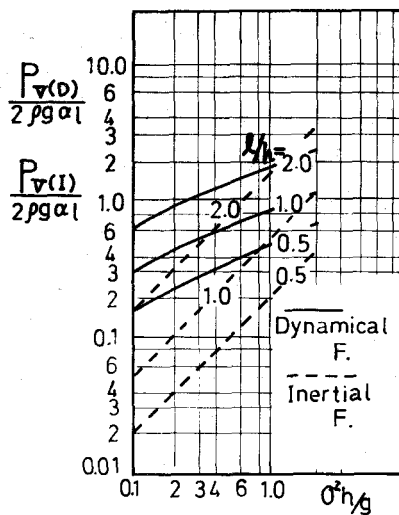


Fig. 6 Dynamical and Inertial Forces for Surface Piston

で表はす。 $l/h = 0.5, 1.0, 2.0$ に対しては Fig. 4 のようである。

板の下面に作用する流体圧力 $p_{z=0}$ とその全圧力 P_V は次式で与えられる。

$$\frac{p_{z=0}}{\rho g a} = -i e^{i \omega t} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ K_s \frac{\cosh \frac{s \pi x}{h}}{\cosh \frac{s \pi l}{h}} + 2i \frac{\omega^2 h}{g} \frac{h}{l} \frac{(-1)^s \coth \mu s h}{(\mu s h)^2} \cos \mu s x \right\} \quad (31)$$

$$\frac{P_V}{\rho g a l} = -i e^{i \omega t} \left[K_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\tanh \frac{s \pi l}{h}}{s \pi l/h} \cdot K_s - 2i \frac{\omega^2 h}{g} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\coth \mu s h}{(\mu s h)^3} \right] \quad (32)$$

上述の計算は電子計算機によつて行はれる。例として $\omega^2 h/g = 0.1$, $l/h = 1.0$ に対する K_s , β 及び γ_n の数値とすると Table-1 のようである。又 $\omega^2 h/g = 1.0$, $l/h = 0.5$ 及び 1.0 に対する圧力分布式(31)とすると Fig. 5 のようであり、 $l/h = 0.5, 1.0, 2.0$ に対して式(32)の実数部による P_V の、動圧力の部分と慣性力の部分とすると Fig. 6 のようである。

以上の結果については尚実験により、之を検証する予定である。

文 献

- 1) 井島尾峰, 他 (1970)
"水が板による防波堤に岸壁
の理論的研究", 土木学会
海浜工学論文集
- 2) Gade, Y. (1964)
"The Generation of Water
Waves with a Vertically
Oscillating Flow at a Channel
Bottom", Rep. No. 9, Portland
Harbour Tech. Res. Inst.

Table 1
Numerical Values of $K(s)$, β and $\gamma(n)$ for $\omega^2 h/g = 0.1$ and $l/h = 1.0$

s	$K(s)$	$ K(s) $	β	$ \beta $
0	0.310111 + 0.279658i	0.310111	0.320691 + 0.000401i	0.320691
1	0.003200 + 0.009642i	0.010160	$\gamma(n)$	$ \gamma(n) $
2	0.000803 + 0.002410i	0.002541	1 -0.000798 + 0.000737i	0.010232
3	0.000357 + 0.001056i	0.001115	2 -0.000354 + 0.001034i	0.002484
4	0.000201 + 0.000583i	0.000617	3 -0.000199 + 0.000564i	0.001084
5	0.000128 + 0.000366i	0.000388	4 -0.000127 + 0.000344i	0.000598
6	0.000089 + 0.000249i	0.000265	5 -0.000088 + 0.000240i	0.000376
7	0.000065 + 0.000179i	0.000191	6 -0.000065 + 0.000173i	0.000256
8	0.000050 + 0.000134i	0.000143	7 -0.000050 + 0.000129i	0.000185
9	0.000040 + 0.000104i	0.000111	8 -0.000039 + 0.000100i	0.000138
10	0.000032 + 0.000082i	0.000088	9 -0.000032 + 0.000079i	0.000107
			10 -0.000032 + 0.000079i	0.000085