II — 13　　アーチダムの厳密荷重分割計算に関する一考察

——主として四成分調整計算について——

熊本大学　工学部　　正員　　三　池　亮　次

1　はじめに

アーチダムの堤体を，水平アーチと鉛直片持ばりの微小要素に分割して，両系の変位が等しくなるように荷重を配分しその立体的応力解析を行う手法は，H. Ritter（1913）に始まり，アメリカの Bureau of Reclamation によって試算荷重計算法として完成し，現在のアーチダムの応力解析の主流となっている。近年，大型電子計算機の使用が可能になるとともに，Ritter法は荷重分割法として迅速な計算が可能になる一方 F. Tölk，M. Herzog，色部，林らによって研究が進められつつあるシェル理論に基づくアーチダムの応力解析法に，有限要素法を適用する試みもなされている。有限要素法が，連続量を離散量に置き換える近似計算法であるなら，荷重分割法もまた同様であり，とくに，シェル構造に対して有効な手法であると考える。

アーチダムを二系に分割し荷重分割計算を行うことの力学的意義について，平板の荷重分割計算を例にとって講演時に紹介するが，J.L. Serafim[1]らはすでに同様の手法により，半径方向，接線方向および鉛直軸のまわりの廻転変位を（それにともなって生ずる接線方向軸のまわりの廻転を考慮して）両系において等しくおく，従来の Bureau of Reclamation によって開発された厳密試算荷重計算に，鉛直方向変位を等しくおく条件を加えた完全調整計算法を提案している。

2．解試算荷重計算法．

(1) マトリクス表示．　いわゆる厳密荷重分割計算法をマトリクスで表示すれば，その解法の意味が明瞭となるであろう。片持ばり要素の半径方向，接線方向および鉛直軸のまわりの廻転変位を $_cd_r$，$_cd_s$，$_cd_\theta$ とすれば，

$$\begin{bmatrix} _cd_r \\ _cd_s \\ _cd_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _cF_r & 0 & (_cF_{r\theta}) \\ & _cF_s & 0 \\ 0 & & _cF_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} _cP_r \\ _cP_s \\ _cP_\theta \end{bmatrix} \quad \text{すなわち} \quad {}_cd = {}_cF \cdot {}_cP \qquad (1)$$

である。ここに F は flexibility マトリクス，$_cP_r$，$_cP_s$，$_cP_\theta$ は，各方向の片持ばり要素の配分荷重，あるいは自己釣合荷重であり，($_cF_{r\theta}$) は，鉛直軸のまわりのモーメントにともなう，片持ばり要素の半径方向変位である。同様に，アーチ要素の変位は，

$$\begin{bmatrix} _ad_r \\ _ad_s \\ _ad_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _aF_{rr} & _aF_{rs} & _aF_{r\theta} \\ _aF_{sr} & _aF_{ss} & _aF_{s\theta} \\ _aF_{\theta r} & _aF_{\theta s} & _aF_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} _aP_r \\ _aP_s \\ _aP_\theta \end{bmatrix} \quad \text{すなわち} \quad {}_ad = {}_aF \cdot {}_aP \qquad (2)$$

である．しかるに，$_cd = {}_ad = d$ であり，外荷重 $P^{(t)} = [\,P_r, 0, 0\,]$ に対して

$$ {}_{a}P + {}_{c}P = P \tag{3} $$

である場合には，

$$ ({}_{a}F + {}_{c}F) \cdot {}_{a}P = {}_{c}F \cdot P \tag{4} $$

を得，(4) 式より得る ${}_{a}P$ を，(2) 式に代入すれば，変位 $d$ を求めることができる。荷重分割法では必ずしも切断によって静定構造系に分割する必要はないが，一対の自己釣合荷重を切断面に作用させてこれを解くことは，適合法に類似した解法と言えよう。

(2)，群試算荷重法，　(4)式の右辺を左辺に移項すれば，

$$ [{}_{c}F \; , \; {}_{a}F + {}_{c}F] \begin{bmatrix} -P \\ {}_{a}P \end{bmatrix} = 0 $$

あるいは，

$$ \begin{bmatrix} {}_{c}F_{r} \, , & {}_{a}F_{rr} + {}_{c}F_{r} \, , & {}_{a}F_{rs} \, , & {}_{a}F_{r\theta} + ({}_{c}F_{r\theta}) \\ 0 \, , & {}_{a}F_{sr} \, , & {}_{a}F_{ss} + {}_{c}F_{s} \, , & {}_{a}F_{s\theta} \\ 0 \, , & {}_{a}F_{\theta r} \, , & {}_{a}F_{\theta s} \, , & {}_{a}F_{\theta\theta} + {}_{c}F_{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_{r} \\ {}_{a}P_{r} \\ {}_{a}P_{s} \\ {}_{a}P_{\theta} \end{bmatrix} = 0 \tag{5} $$

上の連立方程式の解を次のように求めるのが群試算荷重計算法であるが，これは一種の群緩和法であろう。

①．半径方向変位調整（第一次），　${}_{a}P_{s} = {}_{a}P_{\theta} = 0$ の場合の ${}_{a}P_{r} = {}_{a}P_{r\cdot1}$ とすれば，(5)式より

$$ {}_{a}P_{r\cdot1} = ({}_{a}F_{rr} + {}_{c}F_{r})^{-1} \, {}_{c}F_{r} \cdot P_{r} $$

② 接線方向変位調整（第一次）　${}_{a}P_{r} = {}_{a}P_{r\cdot1}$，${}_{a}P_{\theta} = 0$ の場合，${}_{a}P_{s} = {}_{a}P_{s\cdot1}$ として

$$ {}_{a}P_{s\cdot1} = -({}_{a}F_{ss} + {}_{c}F_{s})^{-1} \, {}_{a}F_{sr} \cdot {}_{a}P_{r\cdot1} $$

③ ねじり調整（第一次）　${}_{a}P_{r} = {}_{a}P_{r\cdot1}$，${}_{a}P_{s} = {}_{a}P_{s\cdot1}$ の場合，${}_{a}P_{\theta} = {}_{a}P_{\theta\cdot1}$ として

$$ {}_{a}P_{\theta\cdot1} = -({}_{a}F_{\theta\theta} + {}_{c}F_{\theta})^{-1} ({}_{a}F_{\theta r} \cdot {}_{a}P_{r\cdot1} + {}_{a}F_{\theta s} \cdot {}_{a}P_{s\cdot1}) $$

④ 半径方向変位再調整　${}_{a}P_{s} = {}_{a}P_{s\cdot1}$，${}_{a}P_{\theta} = {}_{a}P_{\theta\cdot1}$ の場合，${}_{a}P_{r} = {}_{a}P_{r\cdot2}$ として

$$ {}_{a}P_{r\cdot2} = -({}_{a}F_{rr} + {}_{c}F_{r})^{-1} (-{}_{c}F_{r} \cdot P_{r} + {}_{a}F_{rs} \, {}_{a}P_{s\cdot1} + {}_{a}F_{r\theta} \cdot {}_{a}P_{\theta\cdot1} + \overline{{}_{c}F_{r\theta} \cdot {}_{a}P_{\theta}}) $$

同様の手法で，接線方向およびねじり変位再調整計算を進める。このような群緩和法は，半径方向のみに自己釣合荷重を作用させる"半径方向調整計算法"の多くのアーチダムへの適用例より考察されるように，変位におよぼす自己釣合荷重の効果の最大のものから，順に計算を行うことによって，収斂速度を高める長所をもつものであり，電算を前提としてもなお有効な解法であろう。

厳密荷重分割計算法では，アーチ要素における曲げモーメントの変化率に等しい変化率をもつモーメントが片持ばり要素に作用し，かつ，クレストにおいて，Kirchhoffの境界条件を満足するように，${}_{a}P_{\theta}$ が片持ばりの半径方向変位を与えるものとした。すなわち，$({}_{c}F_{r\theta}) \neq 0$ であるから，厳密試算荷重計算は，むしろ四成分調整計算と言うべきであるが，(5) 式において $({}_{c}F_{r\theta}) = 0$ とし，接線軸のまわりの廻転 $d_{\phi}$ と自己釣合荷重 $\pm P_{\phi}$ を導入する手法が，より正確な解法と考えられる。

4．むすび，

アーチダムの荷重分割法をマトリクスで整理し，群試算荷重計算法であれば，電算を前提としてもなお有効な計算法であり，アーチのねじり変形を考慮した四成分調整計算の可能性を示唆した。

参考文献：[1] J.L. Serafim and others："Complete Adjustment Method for Analyzing Arch Dams" Jour. S.D. Proc. A.S.C.E. Aug. 1970，p1711～p.1734.