

砂礫堆の形成について

九州大学 正 員 梶 東一郎

〃 学生員 ○定村 寛文

〃 〃 山崎 清

まえがき

河床砂が移動している水路や河川の底面では、2次元的な河床形態、いわゆる *ripple and dune*, *transition*, (*flat*), *anti-dune* が発生する他に、時として3次元的な砂礫堆 (*alternating bar*) が発生し、直線水路に於いても流れは蛇行する。この砂礫堆のスケールについては、かなり多くの実験的研究がなされてきたが、最近、その発生機構について若干の理論的な研究が行なわれるようになった。その一つは、水面波による河床変動が誘起されるとする *Potential* 理論であり、林(1968)は掃流力の非対称性及び流れの変化に応ずる流砂量の遅れを取り入れて砂礫堆形成の説明を試みている。また、Hansen(1967)や Callander(1969)は2次元解析法による河床と流れとの相互作用として河床の安定性を調べているが、かなりの問題があり、不安定性の物理的意義や *regime* との関係が明らかにされたとはいえない段階にある。

さて、2次元的な河床形態については梶・斉藤(1966)は1次元解析法に於ける安定理論に、(1) *sand wave* 間の流れは1波長間に於いて加速流、減速流を繰り返す、河床剪断力が場所的に変化する。こと。(2) *sand wave* 上の砂移動は非平衡状態にある。と云う考えを導入して、*dune*, *flat*, *anti-dune* の発生限界を検討し、かなりの程度まで実験結果が説明されることを示した。本文は上の考えをも河床の3次元不安定性に拡張し、砂礫堆の発生機構、発生範囲などについて若干の検討を加えたものである。

1. 河床剪断応力と非平衡状態の流砂量式

詳細は前報にゆずり、ここでは簡単に述べる。等流状態に於ける河床剪断応力 τ_0 は底面に於ける *velocity defect* を Δ とし

$$\tau_0/\rho = K'^2 \left(\frac{R}{R_s} \right)^{2n} U_m^2 \left(\frac{1-\Delta}{1-\Delta/3} \right) \quad (1)$$

で表わされる。*sand wave* 上の流れのように加速、減速を繰り返す流れでは、 Δ は等流の $\Delta_0 = b \left(\frac{R}{R_s} \right)^{1/2}$ を中心として $\partial R/\partial S$ (S は底面流の方向) によって変化する。

$$\Delta = \Delta_0 + a \frac{\partial R}{\partial S} \quad (2)$$

となる。 a の値は Nikuradse による拡大管、縮小管の実験結果を参照して、 $a \approx 6.0$ の程度である。

次に非平衡状態に於ける掃流砂の連続の式は次のようになる

$$\frac{\partial N}{\partial S} = \pi R_s - \frac{N}{L} \quad (3)$$

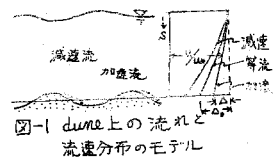
Einstein の model を用い $n = 1/4 D^2$, $\beta_T = A_s D^3 N$, $R_s = D/A_s P/\sqrt{g \phi_0}$,

$R = \lambda A_s \left(\frac{P}{A_*} \right)^{1/2}$ と置くこ、 $A_* = \lambda A_s / A_*$ とし (3) 式は次のようになる。

$$\frac{\lambda D}{A_*} \frac{\partial \Xi}{\partial S} = P - \frac{\Xi}{A_*} (1-P) \quad (4)$$

ここに λ は粒径、 λ, A_* は常数で、 $\lambda \approx 100$, $A_* \approx 1/10$ の程度である。

なお、 Ξ は流砂量の無次元表示で $\Xi = R_s/\sqrt{g \phi_0 D^3}$ (S : 砂粒の水中比重) であり、



Pは砂粒の移動確率で、局所的な流れの場に於ける ψ の関数であり、 ψ に対応する平衡状態の ψ の値 $\bar{\psi}_0$ を用いて、次の形

$$P = \frac{\bar{\psi}_0/A_*}{1 + \bar{\psi}_0/A_*} \quad (5)$$

から決められる。ここに $\bar{\psi}_0$ は

$$\bar{\psi}_0 = \tau_{*0}/\sqrt{sgD^3} = \alpha_* \psi_*^m (\psi - \psi_c), \quad \psi = \tau/\rho / sgD \quad (6)$$

で与えられる。次に勾配 S_0 なる平均河床から測った河床高さについては、空隙率 λ 、流れ方向 x が横方向の速度成分を u , v として、次式のようになる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{U} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \right\} = 0 \quad (7)$$

又、運動方程式、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g S_0 - g \frac{\partial (h+z)}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho h} \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial (h+z)}{\partial x} - \frac{v}{U} \frac{\tau}{\rho h} \quad (9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u h) + \frac{\partial}{\partial y} (v h) = 0 \quad (10)$$

で与えられ、以上の諸式が河床の安定性、不安定性を決める基礎式である。

2. 河床の安定方程式

前章の諸量を平均値とそれからの偏りに分け

$$h = \bar{h}_0 (1 + \eta), \quad u = U (1 + u'), \quad v = U v'$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_0 (1 + \varphi), \quad \psi = \psi_0 (1 + \psi'), \quad P = P_0 (1 + p')$$

とおく。微小振巾波とし、微小項の2乗以上を無視すると、

$$x/\bar{h}_0 = X, \quad y/\bar{h}_0 = Y, \quad \zeta = z/\bar{h}_0, \quad T = t \frac{\sqrt{sgD^3}}{(1-\lambda) \bar{h}_0} \bar{\psi}_0$$

として、次式が得られる。以下、混同の恐れはないので、無次元量 u' , v' の代りに u , v とかく。

$$\text{流砂量の式(4): } E \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \left(1 + \frac{\bar{\psi}_0}{A_*}\right) p' + \varphi = 0 \quad (11)$$

$$\text{ここに、} p' = \frac{B}{1 + \frac{\bar{\psi}_0}{A_*}} \psi' \quad (12) \quad \psi' = \left\{ (2n-p)\eta + 2u - g a \frac{\partial \zeta}{\partial X} \right\} \quad (13)$$

$$\text{河床の砂 (7): } \frac{\partial \zeta}{\partial T} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (14)$$

$$\text{運動方程式(8): } F^2 \chi \frac{\partial u}{\partial T} + F^2 \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial \zeta}{\partial X} + \frac{\partial \zeta}{\partial X} (1 - g a S_0) - S_0 (1 + p - 2n) + 2 S_0 u = 0 \quad (15)$$

$$(9): F^2 \chi \frac{\partial v}{\partial T} + F^2 \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial \zeta}{\partial Y} + \frac{\partial \zeta}{\partial Y} + S_0 v = 0 \quad (16)$$

$$\text{連続の式 (10): } \chi \frac{\partial \zeta}{\partial T} + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial \zeta}{\partial X} = 0 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} F^2 &= U^2 / g \bar{h}_0, \quad \chi = \frac{\sqrt{sgD}}{U} \frac{D}{\bar{h}_0} \frac{1}{1-\lambda} \bar{\psi}_0 = \frac{1}{1-\lambda} \frac{\tau_{*0}}{U \bar{h}_0} \\ E &= \frac{\lambda_0 D}{\bar{h}_0} \left(1 + \frac{\bar{\psi}_0}{A_*}\right), \quad B = m + \frac{\psi_*}{\psi_0 - \psi_c} \\ p &= \frac{\psi_* \cdot \Delta \alpha}{(1-\Delta \alpha)(1-\Delta \alpha/3)}, \quad g = \frac{4/3}{(1-\Delta \alpha)(1-\Delta \alpha/3)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

である。河床の安定を調べるために

$$\zeta = \zeta_* e^{i\tau + i\beta X}, \quad \zeta = \zeta_* e^{i\tau + i\beta X}, \quad u = u_* e^{i\tau + i\beta X} \quad (19)$$

$$v = v_* e^{i\tau + i\beta X}, \quad \varphi = \varphi_* e^{i\tau + i\beta X}$$

とおく。 ζ_* , ζ_* , u_* , φ_* , v_* は γ のみの関数である。(19)を(11)~(17)に代入すると、

$$(\beta E + 1) \varphi_* - B \{ 2u_* + \{ (2n-p) - g a (\beta/3) \} \zeta_* \} = 0 \quad (20)$$

$$r\zeta_* + (i\beta)\varphi_* + \frac{d\psi}{dY} = 0 \quad (b)$$

$$F^2\chi r u_* + F^2(i\beta)\psi_* + (i\beta)\zeta_* + \psi_*\{\beta(1-ga S_0) - S_0(1+p-2n)\} + 2S_0 u_* = 0 \quad (c)$$

$$(F^2\chi r + F^2\beta + 2S_0)\psi_* + \frac{d\psi}{dY} + \frac{d\zeta_*}{dY} = 0 \quad (d)$$

$$(\chi r + i\beta)\zeta_* + (i\beta)\psi_* + \frac{d\psi}{dY} = 0 \quad (e)$$

(a), (b), (c)及び(e)の式から ζ_* , ζ_* , u_* , φ_* を求め、(d)式に代入すると、結局、Callanderと同様な式形、

$$\frac{d^2\psi}{dY^2} + A\psi = 0 \quad (20)$$

が得られる。 ψ は壁面 $y = \pm B$ ($Y = \pm b$)に於いて0にならねばならないから、 A は正の実数であって、(20)の解は次のようになる。

$$\psi = V \cos \sqrt{A} Y = V \cos n \frac{\pi Y}{b}, \quad b = \frac{B}{n} \quad (21)$$

$$A = \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 \quad (22)$$

となるが、このままでは A の式形が複雑で、物理的意味を見出すことは極めて困難である。そこで、式中の各項のorderを考え、 χ 及び S_0 は、 $\chi \leq 1/10$, $S_0 \leq 1/10$ であってorder 1の他の項に較べて、 χ は充分に無視され、 S_0 の項もかなりの精度をもって無視することが出来よう。このような近似を用いると、(22)式は次のようになる。

$$\frac{-\beta\{rE(1-F^2) + B(2-2n+p)\} + i\{r(1-F^2) - \beta^2 ga B\}}{\beta\{1+E-r-B(2n-p)\} + i\{\beta(Bga+E) - r\}} = \frac{\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2}{\beta^2} = \left(\frac{n}{4} \frac{L}{B}\right)^2 = \nu^2 \quad (23)$$

ここに、 $2B$ は水路幅、 L はsand waveの波長であって、単数の砂礫堆では $n=1$ である。

3. 安定方程式の吟味

次に、(23)式から r を求め、 $r = r_1 + i r_2$ として、実数部、虚数部を求めると、それぞれ次式のようになる。

$$r_1 = \frac{\beta^2}{(1-F^2+\nu^2)(\beta^2 E^2+1)} \{ga(1+\nu^2) - E\{2-(2n-p)(1+\nu^2)\}\} \quad (24)$$

$$-r_2/\beta = \frac{1}{(1-F^2+\nu^2)(\beta^2 E^2+1)} \{\beta^2 E ga B + B(2-2n+p) + \nu^2\{\beta^2 E + 1 - B(2n-p)\}\} \quad (25)$$

(19)の表示に於いて、

$r_1 > 0$ のときには河床は不安定であり、 ζ_* の進行速度は $\omega = -r_2/\beta$ で与えられるから、 $-r_2/\beta > 0$ のとき、その進行方向は流れの方向であり(dune)、 $-r_2/\beta < 0$ のとき、流れと逆の方向である(anti-dune)。(24)(25)両式において、 $\nu=0$ の場合が2次元河床にあたる。

この場合、

$1 > F^2$ (常流) のとき、 $ga > E(2-2n+p)$ ならば、

$r_1 > 0$ (不安定) であって、 $-r_2/\beta > 0$ 、即ち dune。

$1 < F^2$ (射流) のとき、 $ga < E(2-2n+p)$ ならば、

$r_1 < 0$ (安定) であって、 $-r_2/\beta < 0$ 、即ち anti-dune。

となり、2次元 dune 及び anti-dune の発生の可能性が裏付けられる。3次元河床は ν の値が大きくなる程 dune 領域が広がってゆき、実際の流れの場合に3次元 anti-dune が発生し難くなることを表わし、今までに観測されている砂礫堆の発生性状と一致している。

4. 安定、不安定の範囲

まず、 $E = \frac{\lambda_1 D}{n_0} \left(1 + \frac{\bar{\sigma}_s}{A_*}\right)$ を $\psi = \frac{n_0 S_0}{s D}$ (s : 水中比重, $s=1.65$)、及び $\varphi = U/u_*$, $S_0 = F^2/\varphi^2$

を用いて書きなおすと、

$$E = \frac{\lambda_1}{s} \cdot \frac{F^2}{\varphi^2} \cdot \frac{1}{\psi} \left(1 + \frac{\beta_0}{A_*} \right) = \frac{\lambda_1}{s} \cdot \frac{F^2}{\varphi^2} \cdot \frac{1}{\psi} \left\{ 1 + \frac{\alpha_* \psi^m (\psi - \psi_0)}{A_*} \right\} = F' E' \quad (26)$$

となる。従って、(24)式の両辺に $(1 - F^2 + \psi^2)$ を乗じ、安定・不安定の境界 $\tau = 0$ の条件を求めると、 F^2 に関する2次式となり、その結果は次式のように極めて簡単な形になる。すなわち、

$$F^2 = \frac{(1 + \psi^2) g a}{E' \{ 2 - (2n - p)(1 + \psi^2) \}} \quad \text{及び} \quad F^2 = 1 + \psi^2 \quad (27)$$

上式に於いて、 a は *sand wave* の流れが加速流、減速流の繰り返しであるための掃流力の変化を示すパラメーターで $a \approx 6.0$ 、 E は流砂の非平衡を示すパラメーターで、掃流力の無次元表示式の関数である。また、 g, n, p, φ は τ_{*s} の値に若干変化するが、 $g = 2.89$, $n = -0.28$, $p = -0.19$ の程度である。いま、 $\varphi = 10$, $A_* = 1/10$, $\alpha_* = 3.72$, $m = 0.5$ とし、 F と ψ との図上に安定限界を記入したものが図-2である。

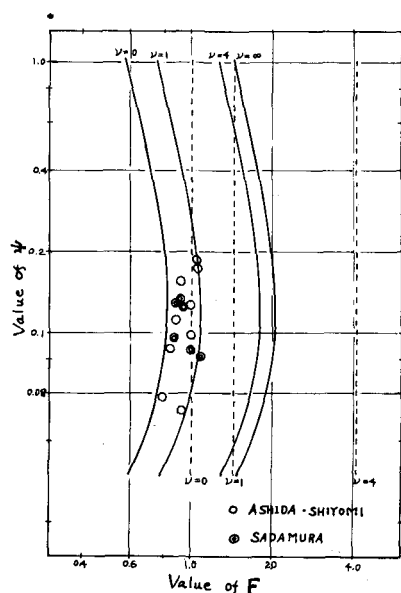


図-2.

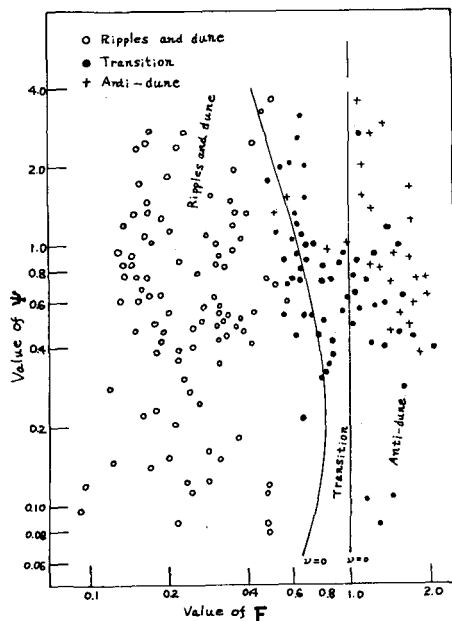


図-3

また、図-3は $\psi = 0$ 、すなわち2次元河床に於ける *dune*, *flat bed*, *anti-dune* の発生範囲を示したもので、図には Garde・Albertson による実験値が記入されている。 $\psi \neq 0$ の3次元河床では、 ψ の値が増すとともに、図-2に示すように (*dune* → *flat*), (*flat* → *anti-dune*) の境界線は右方にずれ、2次元河床の安定範囲が *dune* 型の不安定になることが予想される。図上の点は芦田・塩見及び定村が行なつた砂礫堆の実験値をプロットしたものであるが、この予想とは一致している。

以上のように、量的には未だ検討の余地があるが、理論的にはかなりの程度まで河床の不安定を説明しているように思われる。