

II-1 密度差を伴う二次元水平噴流

九州大学 工学部 正員 橋東一郎

〃 〃 学生員 小松利光

〃 〃 〃 時高豊彦

まえがき

温水流放流、河口における塩淡水の混合現象を解明する試みとして、二次元の水平噴流について考察を行なう。一般に噴流の領域は、流れの形成領域と流れの確立領域に大別される。確立領域における理論はいくつか発表されているが、ここでは形成領域について、potential coreの概念を取り入れて、若干の考察を加えてみた。

1. 基礎式

密度 ρ_0 の流体が高さ h_0 のslitから u_0 なる一様速度で密度 ρ ($\rho > \rho_0$)の流体中に噴出するときの流れの様態を模式的に示すと、図-1のようである。すなわち、流れの形成領域には、厚さ δ のpotential coreが存在し、底層流体との間に流速分布、密度分布が急変する厚さ h の中間層が存在する。

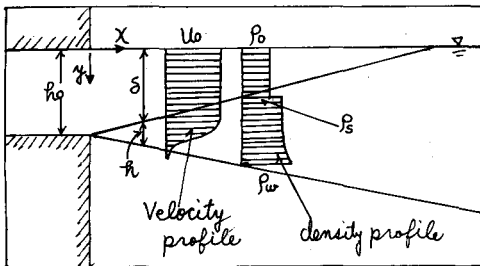


図-1. Schematic View.

流れを規定する基礎式は、慣例の記号を用いて、

$$\text{連続の式: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\text{運動方程式: } \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots (2)$$

$$\text{拡散方程式: } \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad \dots\dots (3)$$

であるが、ここでは中間層において流れの相似性

$$u = u_0 f(\eta), \quad v = V(x) g(\eta), \quad \frac{\rho - \rho}{\rho_0 - \rho_s} = m(\eta), \quad \eta = \frac{y - \delta}{h} \quad \dots\dots (4)$$

を仮定する。ここに $V(x)$ は中間層と下層との境界における鉛直速度で、potential core内の流速、密度は u_0, ρ_0 であり、密度については $y = \delta$ で $\rho = \rho_0$ から ρ_s に不連続的に変化するものとする。

(1)(2)(3)式を $y = 0$ から $y = \delta + h$ まで積分し、

MortonとTaylorにより導入された連行係数の概念、 $-V = E u_m = E \alpha \cdot u_0$ を用いる。(1)~(3)式は、それぞれ近似的に次のようになる。

$$\text{連続の式: } \frac{d\delta}{dx} + \alpha \cdot \frac{dh}{dx} = 0 \quad (5)$$

$$\text{運動方程式: } \frac{d\delta}{dx} + \gamma \cdot \frac{dh}{dx} = 0 \quad (6)$$

$$\text{拡散方程式: } \rho_0/\rho_s = 1 + \varepsilon_0, \quad \rho_s/\rho_0 = 1 + \varepsilon \text{ とし}$$

$$\frac{d}{dx} [\delta + \alpha \cdot h + \varepsilon_0 (\alpha - \beta) \cdot h + \varepsilon \beta \cdot h] = (1 + \varepsilon_0) E \cdot \alpha \quad (7)$$

ここに $\alpha = \int_0^1 f d\eta$, $\beta = \int_0^1 m f d\eta$, $\gamma = \int_0^1 f^2 d\eta$ で、

中間層の平均速度は $u_m = \alpha u_0$ である。(5)(6)(7)式

から、 $\frac{d\delta}{dx}$, $\frac{dh}{dx}$, $\frac{d\varepsilon}{dx}$ を求め、無次元形

$$\delta/h_0 = \Delta, \quad h/h_0 = H, \quad \varepsilon/\varepsilon_0 = \varphi, \quad x/h_0 = \xi \quad (8)$$

で表示すると、次の三式が得られる。

$$\frac{dH}{d\xi} = -\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \cdot E \quad (9)$$

$$\frac{d\Delta}{d\xi} = -\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \cdot E \quad (10)$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\alpha - \{(\alpha - \beta) + \beta \varphi\} \cdot \alpha}{\beta \cdot H} \cdot \frac{1}{\alpha - \gamma} \cdot E \quad (11)$$

ここで式(11)について次のように考える。境界条件として、 $\xi = 0$ で $H = 0, \varphi = 0$ であるから、

$d\varphi/d\xi$ は $\xi = 0$ で $+\infty$ となり、 $\xi = 0$ 附近で φ の値は急激に増加することがわかる。さらに φ は分

子 0 とする φ の値 φ_* に達したとき、 $d\varphi/d\xi = 0$ とな

り、以後 $\varphi = \varphi_* = \text{const}$ の値を取る。すなわち

$$\varphi = \varphi_* = \frac{\beta - \gamma}{\beta} \quad \dots\dots (12)$$

次にEllison & Turnerによると、連行係数 E

は、図-2に示すように、Richardson数 $Ri =$

$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \cdot \frac{g h}{u^2}$ の函数である。Richardson数を書

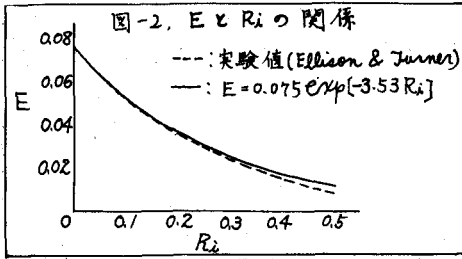
き直すと、(12)の關係を用いて、次式 $Ri = K H$

$$K = \frac{\theta \cdot \gamma}{\alpha^2 \cdot \beta} \cdot \frac{1}{\rho_s^2} \quad F_{10} = \frac{u_0^2}{\varepsilon_0 \cdot g \cdot h} \quad (13)$$

のようになる。なお計算の便宜の爲、図-2の

關係を簡単に次式で表わすことにする。

$$E = A \cdot e^{B Ri} \quad (14)$$



2. Δ , H の計算と potential core の長さ ξ_L
(9) 式に (13), (14) 式を代入すると、

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{\alpha}{\alpha - r} \cdot A \cdot \exp[BK\xi]$$

となり $\xi = 0$ で $H = 0$ を考慮して積分すると

$$H = -\frac{1}{B \cdot K} \ln \left\{ -\frac{\alpha}{\alpha - r} A \cdot B \cdot K \cdot \xi + 1 \right\} \quad (15)$$

次に (9), (10) より $\Delta + r \cdot H = \text{const} = 1$

$$\Delta = 1 + \frac{r}{B \cdot K} \ln \left\{ -\frac{\alpha}{\alpha - r} A \cdot B \cdot K \cdot \xi + 1 \right\} \quad (16)$$

Potential core の長さ ξ_L は (16) 式で、 $\xi = \xi_L$ で $\Delta = 0$ において、次式で表わされる。

$$\xi_L = \frac{\alpha - r}{\alpha} \cdot \frac{1}{A \cdot B \cdot K} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{B \cdot K}{r} \right) \right\} \quad (17)$$

Δ や H , ξ_L は K を通じて内部 Froude 数 Fr_o^2 の函数である。

3. 数値的考察

速度分布 $f(\eta)$ は誤差関数形が適當と考えられるがここでは玉井の実験を参照して $f(\eta) = e^{-2\eta^2}$ を、また密度分布 $m(\eta)$ としては次の二直線の組み合わせを採用する。

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 0.7 & m(\eta) = -0.143\eta + 1 \\ 0.7 \leq \eta \leq 1.0 & m(\eta) = -3\eta + 3 \end{cases}$$

この分布から、計算式の諸定数は

$$\alpha = 0.594, \beta = 0.523, \gamma = 0.441, \theta = 0.800$$

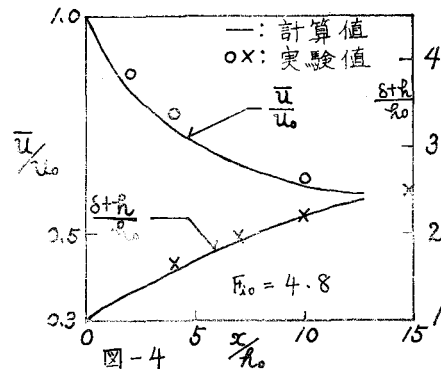


図-4

となる。また E と Ri との関係 (4) 式は、形成領域の範囲では、 $0 < Ri < 0.5$ であるから、一応 $A = 0.075$ $B = -3.53$ を用いる。Potential core の形状を (16) 式から計算し、その結果を図-3 に示す。密度差を伴わない場合の噴流の potential core の長さは一定で、Albertson 5 の実験によると、 $\xi_L = 10$ で与えられている。(17) 式で $Fr_o = \infty$ ($K \rightarrow \infty$) がこの場合に対応するが、(17) 式から $(\xi_L)_{Fr_o \rightarrow \infty} = 7.8$ となり、 Fr_o が減少し密度差の影響が大きくなる程、 ξ_L の値は増加する。これは Fr_o が小さくなるほど底層水の連行が少なく従って躍層水深の増加も少ないので、底層が壁面に近い働きをすることになり、それにより流速山が解持される傾向が生じるものと思われる。

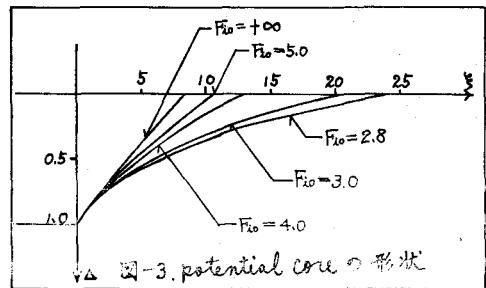


図-3. potential core の形状

また (15), (16) 式より求めた躍層水深 ($H + \Delta$)、及び躍層平均流速 $\bar{u}$ の理論値と和旧、片野によって得られた実験値との比較を図-4、図-5 に示す。躍層水深、平均流速ともに実験値の傾向を良く示しているが、両者とも理論値がやや小さめである。なお、 $Fr_o \rightarrow \infty$ における $\xi_L = 7.8$ と $(\xi_L)_{obs} = 10$ との差異は、この考察がかなり粗いものであることを考えると、一応満足すべきものである。

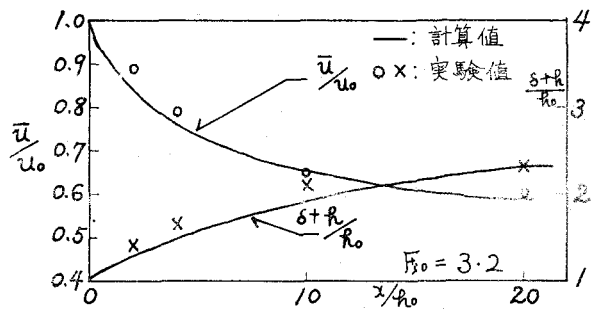


図-5