

九州大学 工学部 正員 小坪 清 真
九州工業大学 正員 高 西 照 彦

1. まえがき

著者等は前論⁽¹⁾において、連続弾性体の固有値の一計算法(代表点法と呼ぶ)を提案し、従来の多質点系置換法によって求めた固有値と代表点法によるそれとを比較検討した結果、遠隔連成系に対する適用例においては代表点法によって求めた固有値の方が一般に精度が高く、特に高次の固有値に対する近似度が従来の方法によるものより勝れていることを示した。

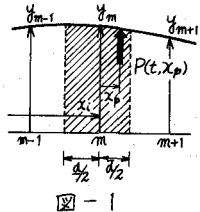
前論に続いて、本論は代表点法による連続弾性体の強制振動を取扱ったもので、(1)代表点法による強制振動の理論、(2)その適用例の2点について述べたものである。

上述のように代表点法の長所は、要求された精度の固有値を得るのに多質点系置換法に比べて一般に、採用すべき代表点の数が少なくて済むことである。したがって、不規則入力に対する弾性体の強制振動の計算において両者を比較すると、数値積分の区間 Δt について考えれば、(1)両者の計算精度を等しくするとすれば、本法ではより大きい Δt を採用することができる。したがって応答計算に要する時間が著しく短縮できる。(2)採用する質点数を等しくするとすれば、同じ Δt に対して本法の計算値はより精度が高いといえよう。

本論は、一計算例を掲げて上述の2点を明示することとをその主な目的としている。

2. 強制振動の理論

a. カによる強制振動(集中力の場合) 図-1において、 x_p 点に強制力 $P(t, x_p)$ をかけた場合、着力点が m を中心とした区間 $(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})$ にあるとき、図-1の斜線部の慣性力による点 n の変位 y_{nm} は次式のように表わせる。



$$y_{nm} = - \int_{x_i - \frac{\Delta}{2}}^{x_i + \frac{\Delta}{2}} \frac{A \rho}{\gamma} \ddot{y}(x) \cdot \alpha_{nx} dx + P(t, x_p) \cdot \alpha_{nx_p} \quad (1)$$

ここに、 A は断面積、 ρ は単位体積重量、 γ は重力加速度である。 α_{nx} は x 点に向く単位荷重による n 点の撓み、 $y(x)$ は x 点における変位とそれぞれ示す。 $\cdot$ は時間に関する微分を表わす。代表点法においては前論で述べたように、 $y(x)$ 、 α_{nx} を共に各代表点を通る x の多項式(例えば、相隣なる3点を通る2次式)で置き換えて(1)式の積分を行う。

着力点が図-1の斜線部外にあるときは、(1)式においてその右辺の2項を考える必要がない。

以上より振動方程式は(1)式を m について加え合せて次式のように表わせる。

$$y_n = \sum_{m=1}^M y_{nm} = - \sum_{m=1}^M \int_{x_i - \frac{\Delta}{2}}^{x_i + \frac{\Delta}{2}} \frac{A \rho}{\gamma} \ddot{y}(x) \cdot \alpha_{nx} dx + P(t, x_p) \cdot \alpha_{nx_p} \quad (2)$$

($n = 1, 2, \dots, M$)

ここに、 M は代表点の総数である。(いまここでは、減衰は考慮していない。)

A, ρ, EI 等が一定の場合、(2)式をmatrix表すと次式に示すようになる。

$$y^T = -\frac{A \cdot P}{g} d \cdot C \cdot \ddot{y}^T - P(t, x_p) \alpha_{xp}^T \quad (3)$$

ここに、 d は代表桌間の距離、 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\alpha_{xp} = (\alpha_{1xp}, \alpha_{2xp}, \dots, \alpha_{nxp})$, T は転置行列を示す。 α は影響係数から作られる正方対称な matrix, C は $\ddot{y}(x)$ と α_{nx} と近似する多項式の各係数によってその各要素が定まる正方対称な matrix である。

b. 力による強制振動(分布荷重の場合) (1)式の場合と同様に考えると次式が成り立つ。

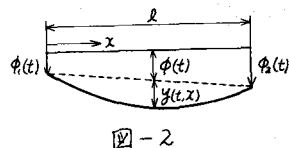
$$y_{nm} = - \int_{x_i - \frac{x}{2}}^{x_i + \frac{x}{2}} \frac{A \cdot P}{g} \{ \ddot{y}(x) - p(t, x) \} \cdot \alpha_{nx} dx \quad (4)$$

ここに、 $p(t, x)$ は弾性体に加えられた単位長さ当りの強制力である。

a の場合と同様に、(4)式を m について加え合せれば n 桌での振動方程式が求められる。

c. 変位による強制振動(支桌が強制変位を受ける場合) 弾性体

の両支桌が図-2に示すような強制変位 ϕ_1, ϕ_2 を受けたときも、 b の場合とほとんど同様に考えて、図-1の斜線部に仿く慣性力による n 桌の変位は次式のように表わせる。



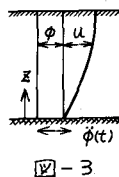
$$y_{nm} = - \int_{x_i - \frac{x}{2}}^{x_i + \frac{x}{2}} \frac{A \cdot P}{g} \left\{ \ddot{y}(x) + \ddot{\phi}(t) + \frac{x}{l} (\ddot{\phi}_2(t) - \ddot{\phi}_1(t)) \right\} \cdot \alpha_{nx} dx \quad (5)$$

(5)式を m について加え合せれば、 n 桌に関する振動方程式が得られることは a の場合と同様である。

d. その他の場合 $a \sim c$ においては、力及び変位による強制振動について述べたが、以上の外にも(1)支桌以外の桌における強制変位が与えられた場合、(2)走行荷重による強制振動等いろいろな場合が考えられるが、本論ではそれ等については述べない。ただ前論において、地盤振動に代表されるような近接連成系については、上述の式とは形の異なる種類の自由振動の方程式を導いておいたので、ここではそれ等に対する強制振動の方程式を示すにとどめる。すなわち、地盤が図-3に示すように基盤から $\dot{\phi}(t)$ の加速度を受けた場合、上記の強制振動の方程式はそれぞれ次式のように表わせる。

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{W}{g} (\ddot{u}(z) + \ddot{\phi}(t)) dz = k_i (u_{i+1} - u_i) - k_{i-1} (u_i - u_{i-1}) \quad (6)$$

$$u_{i+1} - u_i = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left\{ \frac{1}{G} \int_0^z \frac{W}{g} (\ddot{u}(z) + \ddot{\phi}(t)) dz \right\} dz \quad (7)$$

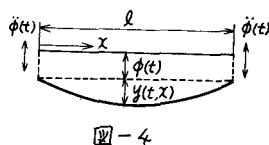


ここに、 u, k_i, G はそれぞれ地盤の変位、バネ常数、せん断弾性常数である。また、 $W = \rho \cdot \Delta l$ で、 ρ は土の単位体積重量、 Δl は代表桌間の距離である。

(6), (7)式において $\ddot{u}(z)$ を z の多項式(例えば2次式)で近似すれば、 $\dot{\phi}(t)$ が与えられたとき両式からそれぞれ地盤に対する地震応答を求めることができる。

3. 適用例並びに変位及び曲げモーメントの計算式

本論における一適用例として、橋梁が地震を受けた場合を想定し、その極く簡単なモデル化として図-4に示すように単純梁が両支桌において、 $\phi(t)$ の強制変位を受けたときに生ずる梁の各桌の変位及び曲げモーメントを計算した。



a. 変位応答の計算式 (5)式において $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ とし, A, ρ, EI 等を一定として(5)式を m について加え合せ, それを matrix 表示すれば次式のようになる。

$$\ddot{y}^T = -\frac{\rho}{AP\alpha} C^T \alpha^{-1} y^T - \ddot{\phi}(t) C^T H^T \quad (8)$$

ここに, H^T は $\frac{1}{\alpha} \int_{x_i - \frac{\alpha}{2}}^{x_i + \frac{\alpha}{2}} \alpha_{mx} dx$ から計算される, α_{mx} の係数によって作られる列 matrix である。

(8)式から $\ddot{\phi}(t)$ が与えられれば, 数値積分によって刻々の変位 y^T が求められる。代表点以外の点での変位が必要な場合は, (5)式において採用した $y(x)$ の近似式を用いて, 任意点での変位を求めることができる。例えば, $y(x)$ を 2 次関数で近似した場合については次式を用いればよい。

$$y(x) = \frac{1}{2\alpha^2} \left[y_{i-1}(x-i\alpha) \{x-(i+1)\alpha\} - 2y_i \{x-(i-1)\alpha\} \{x-(i+1)\alpha\} + y_{i+1} \{x-(i-1)\alpha\} \{x-i\alpha\} \right] \quad \left\{ (i-\frac{1}{2})\alpha \leq x \leq (i+\frac{1}{2})\alpha \right\} \quad (9)$$

b. 曲げモーメント応答の計算式 任意点 x の曲げモーメントは次式によって計算できる。

$$M(x) = \int_0^x \left\{ -\frac{AP}{\rho} (\ddot{y}(x) + \ddot{\phi}(t)) \right\} (l-x) dx = \int_0^x \left\{ -\frac{AP}{\rho} (\ddot{y}(x) + \ddot{\phi}(t)) \right\} (x-5) dx \quad (10)$$

ここに, 5 は距離のパラメータである。(10)式における $\ddot{y}(x)$ の積分については, 例えば $y(x)$ を 2 次関数近似した場合, (9)式を用いて各区間毎に積分を実行しなければならないのは勿論である。なお, (10)式も計算に便利のように matrix 表示することができる。

4. 数値計算及び考察

数値計算に際しては, 代表点法については 4 代表点, 多質点系置換法については 4 及び 7 質点をそれぞれ採用し, 定常入力波及び不規則入力波に対してそれぞれ $1/4, 1/2$ の各点における変位及び曲げモーメント応答を求めた。

計算に用いた単純梁の諸元は断面積 $A = 0.12 \text{ m}^2$, 曲げ剛性 $EI = 3.0 \times 10^8 \text{ kg/m}^2$, 長さ $l = 50 \text{ m}$, 単位体積重量 $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ である。

この梁の固有円振動数の厳密解, 代表点法による解, 多質点系置換法による解を表-1 に示す。

α を震度とし, $\ddot{\phi}(t) = -\alpha g \sin \omega t$ を入力波として用いた場合について種々の ω に対してそれぞれ厳密解, 代表点法, 多質点系置換法による解を求めた。(三者のうち, 厳密解は 0.4 次振動までを採用し, 他の二者は正分数 4 の場合について計算した。) $1/4, 1/2$ 点における最大変位の厳密解に対する比をそれぞれ表-2 の通りである。

なお, 不規則入力波に対する変位及び曲げモーメント応答, 更にはまえがきで述べた積分区間 α を種々変えた場合についての計算結果及び考察は講演時に発表する予定である。

振動 次数	厳密解	代表点法 (4点系)	多質点系 (4点系)	多質点系 (7点系)
1	6.970	6.986	6.986	6.970
2	27.880	27.838	27.678	27.865
3	62.730	63.223	58.766	62.515
4	111.52	112.80	78.284	109.92
5	174.25			165.87
6	250.92			217.37
7	341.53			239.74

表-1 単純梁の固有円振動数

ω	$1/4$ 点		$1/2$ 点	
	代表点法	多質点系	代表点法	多質点系
3.0	0.9944	0.9477	1.0007	0.9499
5.0	0.9946	0.9486	1.0010	0.9499
10.0	0.9915	0.9489	0.9984	0.9461
15.0	0.9894	0.9528	0.9973	0.9427
20.0	0.9858	0.9583	0.9951	0.9374
40.0	0.9446	1.0261	0.9700	0.8941
50.0	0.8240	1.1741	0.9302	0.8787
70.0	1.1145	0.7273	0.6596	0.5688
100.0	0.9782	0.7209	1.4841	1.9009
150.0	0.7237	0.5676	11.162	12.630

表-2 最大変位(厳密解に対する比)

(1): 小坪・川人・高西 「代表点法による連続弾性体の固有値計算法」 九大工学集報 vol. 43,

NO. 5, 昭 45. 10