

九州大学 正員 櫻木 武

長崎大学 正員 高橋和雄

1. 緒言 著者らはこれまで Berger の有限変形理論⁽¹⁾のもとで、板の支承が振動中に面内方向に移動しないという仮定のもとに、有限の振幅によって生ずる面内応力を非線形項とする矩形および扇形板の非線形振動を解明し、その自由振動時における振動数や強制振動時における応答振幅におよぼす非線形項の影響を検討してきた⁽²⁾⁽³⁾。本研究では環状板の非線形振動について吟味検討せんとするものである。周知のごとく環状板の線形振動波形 $W(r, \theta)$ は θ について周期性をもつべきことから $W(r, \theta) = R(r) \cos n\theta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) と表わされるが、このうち n が零でない場合には、環状板の振動波形は直径からなる節線によって分けられ、その非線形振動特性は節線によって囲まれるところの扇形領域からなる板、すなわち直線単純支持扇形板の場合と一致し、これについては文献(3)に示すとおりである。一方、 n が零の場合にはその振動波形は軸対称であり、その非線形振動特性は扇形板のそれとは異なることが予想される。したがって、本論文では軸対称変形を生ずるとき線形振動波形をもつ環状板の非線形振動特性を検討するものである。

2. 解法 全面に等分布する周期的変動圧力 P を受ける板の非線形曲げ振動の微分方程式は次のごとく与えられる。

$$D \nabla^4 w - N \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \cos \Omega t \quad (1)$$

$$\frac{N r^2}{12 D} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{u}{r} = \frac{1 - \nu}{E h} (N_r + N_\theta) \quad (2)$$

ここに、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, r, θ : 極座標系, h : 板厚, ρ : 板の密度,

$D = E h^3 / [12(1 - \nu^2)]$: 板剛度, ν : ポアソン比, E : 弾性係数, t :

時間, w : 板のたわみ, u : 板の半径方向の面内変位, N_r, N_θ : 板

の半径, 接線方向の面内応力, N : N_r, N_θ と同じ次元をもつ定数, Ω : 外力の円振動数, P : 荷重分布強度

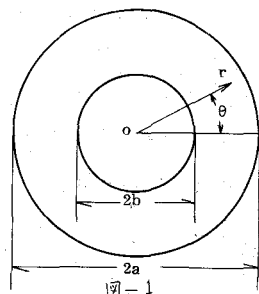


図-1に示すとき環状板において、内周および外周の境界条件が単純支持または固定され、かつそれらの支承上の半径方向の面内変位 u が起こらないものとすれば、式(2)は次のごとく簡単となる。

$$\frac{N r^2}{12 D} \times (a^2 - b^2) = -\frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} w (\nabla^2 w) r dr d\theta \quad \text{ここに、} a, b : \text{環状板の外径, 内径} \quad (3)$$

式(1)および式(3)の近似解をうるために、板のたわみ w を次のごとく仮定する。

$$w = C W(r) F(t) \quad (4)$$

ここに、 C : 振幅, $W(r)$: 境界条件を満足する座標関数, $F(t)$: 未知の時間関数

式(4)の座標関数として、環状板の線形自由振動の標準関数を用いるものとすれば、 $W(r)$ は次のごとく厳密に算定される。

$$W(r) = A J_0(rs) + B Y_0(rs) + C I_0(rs) + D K_0(rs) \quad (5)$$

ここに、 $J_0(rs), Y_0(rs)$: 0 次の第1種, 第2種 Bessel 関数, $I_0(rs), K_0(rs)$: 0 次の変形された第1種, 第2種 Bessel 関数, $s = r/a, r = a \sqrt{\rho h \omega / D}$; 線形振動の固有値, ω : 線形振動の固有円振動数, A, B, C, D : $W(r)$ の最大値が1となるように決定される積分定数

しなるとき、規準関数 W に関して $\nabla^2 W = \frac{c h \omega^2}{G} W$ が成立することを考慮すれば、式(1)が次のごとく書き改められる。

$$\omega^2 \rho A W F - c N \nabla^2 W F + c \rho A W \ddot{F} = \rho c \cos \Omega t \quad (6)$$

式(6)にガラーキン法を適用のうえ、式(3)を用いて N を消去すれば、時間に関する2階の非線形常微分方程式が求まり、環状板の非線形振動の運動方程式が次のごとくえられる。

$$\ddot{F} + \omega^2 F + \frac{12}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{a^2} \omega^2 F^3 = 12(1-\nu^2) \frac{\lambda}{a^2} \frac{\omega^2}{R^2} \frac{\rho A}{E h} \cos \Omega t \quad (7)$$

ここに、 $\varphi = \int_{\mu} \{A J_0(Rs) + B Y_0(Rs) + C I_0(Rs) + D K_0(Rs)\} \{A J_0(Rs) + B Y_0(Rs) - C I_0(Rs) - D K_0(Rs)\} ds$, $\eta = \int_{\mu} \{A J_0(Rs) + B Y_0(Rs) + C I_0(Rs) + D K_0(Rs)\}^2 ds$, $\lambda = \int_{\mu} \{A J_0(Rs) + B Y_0(Rs) + C I_0(Rs) + D K_0(Rs)\} ds$, $\mu = b/a$

(1) 非線形自由振動 式(7)において、強制力 ρ を零とすれば、扇形板の非線形自由振動の基礎式がえられ、初期条件 $F(0) = 1, \dot{F}(0) = 0$ で解けば、Jacobi の楕円関数における関数 cn で与えられ、次のごとくである。

$$F = cn \left(\lambda \omega \sqrt{1 + 12 \frac{c^2}{R^2}}, \sqrt{2 + \frac{1}{6\eta} \frac{R^2}{c^2}} \right) \quad (8) \quad \text{ここに、} \eta = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{a^2}$$

関数 cn は $4K$ の基本周期をもつゆえ、振動数比 V^*/V_0 ($V_0 = \omega/2\pi$) が次のごとくえられる。

$$\frac{V^*}{V_0} = \frac{\eta}{2K} \sqrt{1 + 12 \frac{c^2}{R^2}} \quad (9) \quad \text{ここに、} K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta / (2 + \frac{1}{6\eta} \frac{R^2}{c^2})}} \quad (\text{第1種完全楕円積分})$$

また、振動中の曲げ応力 G および面内応力の総和 $(N_1 + N_2)/Eh$ は式(4),(3)から次のごとく算定される。

$$\begin{aligned} \frac{G}{E} &= \frac{6M}{R^2} = \pm 2 \frac{c}{R^2} \{A J_0(Rs) + B Y_0(Rs) + C I_0(Rs) + D K_0(Rs)\} F \omega (1-\nu^2) \frac{R^2}{a^2} \\ \frac{N_1 + N_2}{Eh} &= \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{R^2} \frac{c^2}{a^2} F \omega \frac{1}{1-\nu} \frac{R^2}{a^2} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 $J_0(Rs) = J_0(Rs) - (1-\nu) \frac{J_0(Rs)}{Rs}$, $Y_0(Rs) = Y_0(Rs) - (1-\nu) \frac{Y_0(Rs)}{Rs}$
 $I_0(Rs) = -J_0(Rs) + (1-\nu) \frac{I_0(Rs)}{Rs}$, $K_0(Rs) = -K_0(Rs) - (1-\nu) \frac{K_0(Rs)}{Rs}$

(2) 非線形強制振動 外力と同じ円振動数 Ω をもつ式(7)の定常解を逐次近似法により算定すれば、次のごとく近似解がえられる。

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^2}{\omega^2} &= 1 + 9\eta \frac{c^2}{R^2} - \lambda \frac{\rho A}{6\eta E h} \\ F &= \cos \Omega t + \frac{3}{8} \frac{\frac{c^2}{R^2}}{1 + 9\eta \frac{c^2}{R^2} - \lambda \frac{\rho A}{6\eta E h}} \end{aligned} \quad (11) \quad \text{ここに } \lambda = \frac{12(1-\nu^2)}{R^2} \frac{\lambda}{\eta}$$

(3) 静的曲げ 式(7)に $\ddot{F} = 0, F = 1$ および $\cos \Omega t = 1$ を代入すれば、環状板が一様圧力 P を受ける場合の有限変形に関する近似式が次のごとくえられる。

$$\frac{\rho A^2}{E h^2} = r_1 \frac{c}{R} + r_2 \frac{c^3}{R^3} \quad (12) \quad \text{ここに、} r_1 = \frac{R^2}{12(1-\nu^2)\lambda}, r_2 = \frac{R^2}{(1-\nu^2)(1-\mu^2)} \frac{\varphi^2}{\lambda}$$

3. 計算例 内外径比 $\mu = 1/2$ および $\nu = 0.3$ なる環状板において、内周、

外周の境界条件がいずれも単純支持の場合(S.S.), 内周固定, 外周単純支持の場合(C.S.), 内周単純支持, 外周固定の場合(S.C.) およびいずれも固定の場合(C.C.) の4例を対象として、非線形自由振動の特性を求めれば、式(9)から図-2の結果となる。図より振動数比 V^*/V_0 は振幅比 c/h の増大に伴って増加するといえ、また、本例と文献(3)に示す扇形板と比較すれば、環状板の振動数比が扇形板のそれより大きいことがわかる。

4. 結語 算例では非線形自由振動における環状板の境界条件の影響を明らかにしたが、その他の特性については講演時に発表の予定である。

参考文献 (1) H.M.Berger; A new Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates, J. Appl. Mech., Vol. 22 (1955), (2) 山崎 高橋; Free Vibrations of Continuous Rectangular Plates, Pro. 19th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1969, (3) 櫻木 高橋; 扇形板の非線形自由振動 九大工学集報 第43巻 第4号 昭和45年6月

