

# I-15 補剛アーチ橋の動的静的無次元解析

熊本大学 正員 平井一男  
同 正員 吉村虎蔵  
同 学生員 徳留正男  
同 客員 宮崎建夫

まえがき

この研究は、固有振動数の比で示される無次元量  $\lambda (= \omega^2/\omega_{gn}^2)$  を使ってランガー橋の固有振動数や固有モードを求め、さらにランガー橋の静的レスポンス（たわみ、曲げモーメント、軸力等）を得ようとするものである。解析はまず補剛橋の動的解析を行い、しかるのちアーチ部との接合を行って、ランガー橋全体としてのレスポンスを求めた変形等置理論による。

## (1) 固有振動数、振動モードについて

ランガー橋の変形を次のように考える。

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/l) \quad \text{----- (1)}$$

(1) で示される変形がおこった場合、補剛橋と放射線アーチとの幾何学的な変形条件から、次の適合条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} n=1, 3, 5, \dots \text{のとき} \quad \Delta H &= \frac{16 E f B}{\pi l^2} \sum \frac{a_n}{n} \\ n=2, 4, 6, \dots \text{のとき} \quad \Delta H &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (2)}$$

ここに  $\Delta H$  : アーチの水平推力

$$B = Aa / [ Aa/A_0 + \{ 1 + 8(f/l)^2 + 19.2(f/l)^4 \} ]$$

この適合条件式からわかるように、アーチは対称変形するときだけ働き、逆対称変形するときには働かないので、補剛橋のみの振動を考えればよい。

いま、補剛橋のみに等分布周期力、 $p_0 \sin \omega t$  が作用するとき、補剛橋のたわみは式(2)で示される。

$$w(x,t) = \frac{4 p_0}{\pi^2} \sum \frac{1}{n(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin \omega t \quad \text{----- (3)}$$

式(3)で示される振動変位と同じ変位をアーチに与えるような分布力  $p_n$  の大きさは、

$$p_n = \frac{8 f}{l^2} \Delta H = \frac{512 E f^2 B}{\pi^2 p l^2} \sum \frac{1}{n^2 (\omega_{gn}^2 - \omega^2)} p_0 \quad \text{----- (4)}$$

この  $p_n$  をアーチに加えながら補剛橋と結合すれば補剛橋とアーチとは一体となって振動する。自由振動時には、上記の外力は 0 でなければならぬ。すなわち、 $p_n + p_0 = 0$  ----- (5)

これがランガー橋の振動数方程式であるが、式(4),(5)より、これは次式のように書き表される。

$$\frac{\pi^2 l}{512 f^2 B} = \sum \frac{1}{n^2 (1 - \lambda^2)} - 1.00144 \quad \text{----- (6)}$$

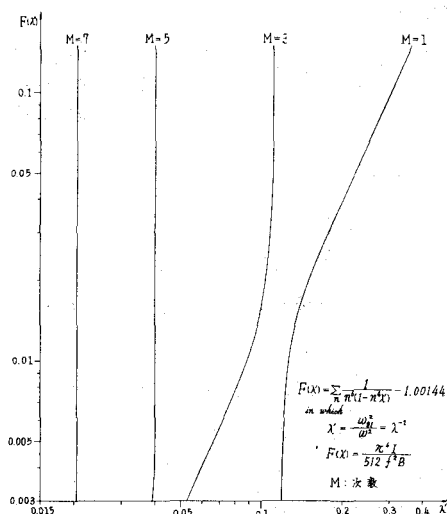


図 - 1

式(6)が対称振動時の振動数方程式である。

次に、ランガー橋の固有モード  $\bar{\omega}_m(x_i)$  は、図-1から求めた  $\omega_m$  を式(3)に代入し、さらに正規化すると、次式にて示される。

$$\bar{\omega}_m(x_i) = \sqrt{\frac{2}{P\ell}} \left( \sum_{n=1,3,5,\dots} \ell_{mn}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1,3,5,\dots} \ell_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x_i}{\ell}\right) \quad \text{ここに、} \quad \ell_{mn} = 1/n(\omega_{gn}^2 - \omega_m^2) \quad (7)$$

さらに、 $\lambda$  を使ってこれを書きかえらる。

$$\bar{\omega}_m(x_i) = \sqrt{\frac{2}{P\ell}} / \sqrt{\sum_n \{1/n^2(n^2 - \lambda^2)\}} \left\{ \sum_n \frac{1}{n(n^2 - \lambda^2)} \sin\left(\frac{n\pi x_i}{\ell}\right) \right\} \quad (8)$$

また、対称振動の場合の固有振動数と正規化モードは、補剛橋のみを考慮して、次のようになる。

$$\omega_{gm} = (m\pi/\ell)^2 \sqrt{\frac{EI}{P}} \quad \text{ここに} \quad \bar{\omega}_{gm}(x_i) = \sqrt{\frac{2}{P\ell}} \sin\left(\frac{m\pi x_i}{\ell}\right) \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (9)$$

## [2] 静荷重によるたわみと曲げモーメントについて

図-2に示すように  $x = x_j$  なる位置に集中荷重  $P(t)$  が作用するとき、 $x = x_i$  点におけるランガー橋の動的レスポンス  $W$  は、 $x$  の  $\omega_m$  と  $\bar{\omega}_m(x)$  とを使って次式(10)、(11)から求められる。

$$\ddot{W}_m + \omega_m^2 W_m = \bar{\omega}_m(x = x_i) \cdot \bar{\omega}_m(x = x_j) \cdot P(t) \quad (10)$$

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\omega}_m \quad (11)$$

静荷重  $P_0 = 1$  が  $x = x_j$  点に作用するときには、式(10)の解は、次式にて与えられる。

$$W(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\omega}_m(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\omega}_m(x_i) \bar{\omega}_m(x_j) / \omega_m^2 \quad (12)$$

また、補剛橋における曲げモーメントのレスポンスは、上のたわみ曲線の2階微分として得られる。すなわち、

$$M(x) = -EI \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = -EI g \frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\omega}_m \right) \quad (13)$$

なお、式(12)を  $\lambda$  を使って示すと

$$W(x_i) = \sum_m \bar{\omega}_m(x_i) = \frac{2\ell^2}{\pi^2 EI} \sum_m \frac{\lambda_m}{\sum_n \{1/n^2(n^2 - \lambda_m^2)\}} \left\{ \sum_n \sin\left(\frac{n\pi x_i}{\ell}\right) / n(n^2 - \lambda_m^2) \right\} \times \left\{ \sum_n \sin\left(\frac{n\pi x_j}{\ell}\right) / n(n^2 - \lambda_m^2) \right\} \quad (14)$$

あとがき

式(14)の右辺は、振動モードの積になっているが、荷重点を変化させることにより、「たわみ-影響線」を得ることができぬ。図-4は、図-3を使って描いたもので、ランガー橋橋のデムンジョンが変った時の  $y_{1/2}$ -line の変化を示している。

同様に、曲げモーメントやアーチの軸力の影響線等も簡単に求めることができる。

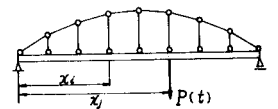


図-2

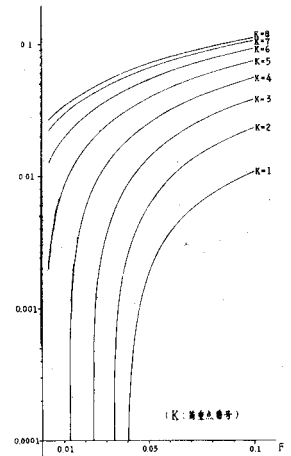


図-3

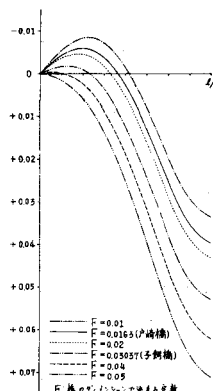


図-4