I －13　曲げと捩りモーメントを同時に受ける矩形断面部材の弾塑性解析

宮崎大学工学部　○学生員　川越和由
〃　〃　正　員　太田俊昭

I. 緒言　本研究は、一様な矩形断面棒に曲げモーメントと捩りモーメントを同時に加えた場合の弾塑性挙動を解明すべく、文献(1)による膜理論を用いて差分法による応力と変形の方法を確立し、そのプログラムの作製を試みたものである。

II. 基礎理論及び解法　一様な矩形断面棒を考えて、直交座標(x, y, z)を図-1のように設定する。この棒が z 軸のまわりに T なる捩りモーメント、y 軸のまわりに M なる曲げモーメントを受け、z 軸方向に垂直応力 σ_z、y 軸および x 軸方向にせん断応力 τ_{yz}、τ_{xz} を生じたとする。

ただし、他の応力は近似的にゼロと仮定する。

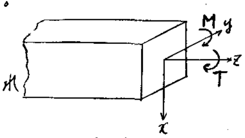

図-1

このとき塑性域におけるロイスの方程式は文献(2)により次の式であらわされる。

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x=\dot{\varepsilon}_y&=-\frac{1}{3}\sigma_z\dot{\lambda}-\frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_z,\quad \dot{\varepsilon}_z=\frac{2}{3}\sigma_z\dot{\lambda}+\frac{\dot{\sigma}_z}{E}\\ \dot{\gamma}_{yz}&=2\tau_{yz}\dot{\lambda}+\frac{\dot{\tau}_{yz}}{G},\quad \dot{\gamma}_{xz}=2\tau_{xz}\dot{\lambda}+\frac{\dot{\tau}_{xz}}{G}\end{aligned}\right\} \quad\text{-------- (1)}$$

ただし、$\dot{\varepsilon}_x$, $\dot{\varepsilon}_y$, $\dot{\varepsilon}_z$; x, y, z 軸方向のひずみ速度

$\dot{\gamma}_{yz}$, $\dot{\gamma}_{xz}$; せん断ひずみ速度(工学的定義)

$\dot{\lambda}$; 正のスカラー定数, E ; 縦弾性係数, G ; せん断弾性係数, ν ; ポアソン比

また、ミーゼスの降伏条件は

$$F=\sigma_z^2+3(\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)=\sigma_Y^2 \quad\text{-------- (2)}$$

ただし、σ_Y ; 単軸引張降伏応力

式(2)を時間で微分し、式(1)に代入して $\dot{\lambda}$ について解けば $\dot{\lambda}$ は次の式で与えられる。

$$\dot{\lambda}=\frac{3\{\sigma_z\dot{\varepsilon}_z+3(\dot{\gamma}_{yz}\tau_{yz}+\dot{\gamma}_{xz}\tau_{xz})/2(1+\nu)\}}{2\{\sigma_z^2+9(\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)/2(1+\nu)\}} \quad\text{-------- (3)}$$

さらに式(1)に式(3)を代入して $\dot{\sigma}_z$, $\dot{\tau}_{yz}$, $\dot{\tau}_{xz}$ について解けば、結局次の式がえられる。

$$\dot{\sigma}_z=E\left\{\dot{\varepsilon}_z-\frac{2(1+\nu)\sigma_z^2\dot{\varepsilon}_z+3\sigma_z(\tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz}+\tau_{xz}\dot{\gamma}_{xz})}{2(1+\nu)\sigma_z^2+9(\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)}\right\} \quad\text{-------- (4)}$$

$$\dot{\tau}_{yz}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\dot{\gamma}_{yz}-\frac{6(1+\nu)\sigma_z\tau_{yz}\dot{\varepsilon}_z+9\tau_{yz}(\tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz}+\tau_{xz}\dot{\gamma}_{xz})}{2(1+\nu)\sigma_z^2+9(\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)}\right\} \quad\text{-------- (5)}$$

$$\dot{\tau}_{xz}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\dot{\gamma}_{xz}-\frac{6(1+\nu)\sigma_z\tau_{xz}\dot{\varepsilon}_z+9\tau_{xz}(\tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz}+\tau_{xz}\dot{\gamma}_{xz})}{2(1+\nu)\sigma_z^2+9(\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)}\right\} \quad\text{-------- (6)}$$

次に、全ひずみ増分を変形要素である曲率、捩り角などの速度で一般表示し、これを用いてロイスの方程式を変形すれば、文献(2)より

$$\frac{3\left(-\dot{\kappa}x-\frac{\dot{\sigma}_z}{E}\right)}{2\sigma_z}=\frac{\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial y}+\dot{\omega}x-\frac{\dot{\tau}_{yz}}{G}}{2\tau_{yz}}=\frac{\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x}-\dot{\omega}y-\frac{\dot{\tau}_{xz}}{G}}{2\tau_{xz}} \quad\text{-------- (7)}$$

ただし、$\dot{\kappa}$; 曲率速度, $\dot{\omega}$; 捩り角速度, φ ; 断面のゆがみ,

式(7)を $\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial y}$, $\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x}$ について解き、それぞれ x, y で偏微分してえられる2つの式を等置すれば次の方程式がえられる。

$$2G\dot{\omega}+\left(\frac{\partial\dot{\tau}_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\dot{\tau}_{yz}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{3G}{\sigma_z}\left(-\dot{K}x-\frac{\dot{\sigma}_z}{E}\right)\tau_{xz}\right\}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{3G}{\sigma_z}\left(-\dot{K}x-\frac{\dot{\sigma}_z}{E}\right)\tau_{yz}\right\}=0 \quad \text{------} (8)$$

ここで応力関数ϕを導入して

$$\tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\phi_x\ ,\quad \tau_{xz}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\phi_y \quad \text{------} (9)$$

とおけば、式(8)は次のように書きあらわすことができる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\{(f)\dot{\phi}_x\}+\frac{\partial}{\partial y}\{(f)\dot{\phi}_y\}=-2G\dot{\omega}-(h) \quad \text{------} (10)$$

ただし、$(f)=-\frac{1}{\sigma_z}\left\{3G\left(\dot{K}x+\frac{\dot{\sigma}_z}{E}\right)\right\}$, $(h)=\frac{\partial\dot{\tau}_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\dot{\tau}_{yz}}{\partial x}$

一方、弾性域ではϕとωに関して次の式が成立する(文献(1)参照)。

$$\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial\phi_y}{\partial y}=-2G\omega \quad \text{------} (11)$$

ただし、ω;捩り角

式(10)および式(11)よりϕを解析的に求めることは不可能であるので、ここでは差分法を適用する。式(10)、(11)を差分表示してひとつの式にまとめると次のようになる。

$$\beta_{ij}(4f_{ij}+f_{ij-1}+f_{ij+1}+f_{i+1j})\phi_{ij}-\beta_{ij}(f_{ij}+f_{i-1j})\phi_{i-1j}-\beta_{ij}(f_{ij}+f_{i+1j})\phi_{i+1j}-\beta_{ij}(f_{ij}+f_{ij-1})\phi_{ij-1}-\beta_{ij}(f_{ij}+f_{ij+1})\phi_{ij+1}$$
$$+4(1-\beta_{ij})\phi_{ij}-(1-\beta_{ij})\phi_{i-1j}-(1-\beta_{ij})\phi_{i+1j}-(1-\beta_{ij})\phi_{ij-1}-(1-\beta_{ij})\phi_{ij+1}=4\lambda^2\omega-4\lambda^2\left(\omega'+\frac{1}{2}h_{ij}\right)\beta_{ij} \quad \text{------} (12)$$

ただし、$h_{ij}=\frac{1}{\lambda}\left\{(\dot{\tau}_{yz})_{i+1j}-(\dot{\tau}_{yz})_{i-1j}+(\dot{\tau}_{xz})_{ij+1}-(\dot{\tau}_{xz})_{ij-1}\right\}$

ここにβ_{ij}は、$\beta_{ij}=0$(;弾性), $\beta_{ij}=1$(;塑性)とし、$\dot{\omega}=\omega-\omega'$で$\omega'$は前の荷重段階の$\omega$値である。また、$i$および$j$は断面を等分割した場合の任意の格点の位置を示し、$\lambda$は分割区间の長さをあらわすものである(図-2参照)。

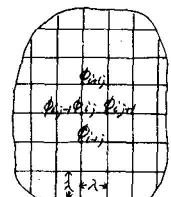

図-2

次に捩りモーメントTは膜理論により次式で与えられる(文献(1)参照)。

$$T=2\iint\phi\, dA$$
$$=2\lambda^2\sum_i\sum_j(\phi_{ij}+\phi_{ij+1}+\phi_{i+1j}+\phi_{i+1j+1}) \quad \text{------} (13)$$

一方、格点(i,j)の垂直応力$(\sigma_z)_{ij}$は一般に次のように表わされる。

$$(\sigma_z)_{ij}=E(-Kx_i)(1-\beta_{ij})+\sqrt{3}\beta_{ij}\sqrt{k^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{ij}^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{ij}^2} \quad \text{------} (14)$$

ただし、K;曲率, k;せん断降伏応力$(=\sigma_y/\sqrt{3})$

したがって、曲げモーメントMは次の式で与えられることになる。

$$M=\int\sigma_z x\, dA$$
$$=\sum_i\sum_j(\sigma_z)_{ij}\, y_i\Delta A$$
$$=-EK\sum_i\sum_j y_i x_i(1-\beta_{ij})\Delta A+\sum_i\sum_j y_i\beta_{ij}\sqrt{k^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{ij}^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{ij}^2}\,\Delta A \quad \text{------} (15)$$

ただし、ΔA;微小面積

以上の諸式から、T, Mに対するω, Kおよび$\xi, \gamma, \sigma_z, \tau$が算定され、未知パラメーター$\beta_{ij}$は$\sigma_z$および$\tau$をミーゼスの条件式に代入して弾塑性の判別によって決定されるゆえ、結局このような組合せ負荷に対する弾塑性応力の解析が可能となる。

Ⅲ 参考文献

(1) 伊集院、太田;「一様な捩りモーメントを受ける棒の弾塑性解析について」, 土木学会第25回年次学術講演会講演集第1部, 昭和45年11月

(2) 山田嘉昭 ;「塑性力学」, 日刊工業新聞社