

宮崎大学 学生員 佐野 洋

宮崎大学 正員 太田 俊昭

I 緒言 本研究は、先に提案した^{*} 正方形及び矩形断面を対象とする 弾塑性捩り解析理論を拡張 応用し、I型、T型断面の弾塑性捩り挙動を解析すると共に、それらの実用公式を提示したもので、特にI型、T型断面などを矩形体の集合体としてとらえ一般の場合の近似公式を併記している。

II 基礎的考察及び解法 弾塑性捩り解析理論の骨子を概説すれば、次の通りである。

一様な任意形断面棒が T を捩りモーメントで捩られる場合の捩り応力函数を χ とすれば、図-1

より、弾性域では $\partial^2 \chi / \partial y^2 + \partial^2 \chi / \partial z^2 = -2\omega \theta$ (1)

ただし、 G ；剪断弾性係数、 ω ；単位長さ当り捩り角。

また、塑性域では、ミーゼスの条件 $\sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = K = \sigma_r / \sqrt{3}$ より

$$\{(\partial \chi / \partial y)^2 + (\partial \chi / \partial z)^2\}^{1/2} = |\text{grad } \chi| = M_{\max} |\partial \chi / \partial z| = K \cdots (2)$$

ただし、 σ_r ；降伏応力、 z ；任意方向をとり座標軸。

式(1)(2)を無次元化して差分表示すれば、弾性、塑性の両域に 適用可能な式として 次の式がえられる。

$$(4\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) \bar{\phi}_{i,j} - \alpha_{i,j-1} \bar{\phi}_{i,j-1} - \alpha_{i,j+1} \bar{\phi}_{i,j+1} - \alpha_{i-1,j} \bar{\phi}_{i-1,j} - \alpha_{i+1,j} \bar{\phi}_{i+1,j} = 2\bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \alpha_{i,j} + \bar{c}_{i,j} \beta_{i,j} \cdots (3)$$

ただし、 $\bar{\phi} = \phi / \omega r$, $\bar{\omega} = \omega / \omega_r$, $\bar{\lambda}$ ；格子間隔、 α, β は弾性域では $\alpha=1, \beta=0$ 塑性域では $\alpha=0, \beta=1$ とする。

次に 捩りモーメントは、膜理論より

$$T = 2 \int \chi dA = \omega_r G A^2 \bar{\lambda}^2 \sum (\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i,j+1} + \bar{\phi}_{i+1,j} + \bar{\phi}_{i+1,j+1}) / 2$$

上式を 弾性限界時の捩りモーメント $T_r = \omega_r G A^2 \bar{\lambda}^2 B_{\phi} / 2$ 除以して

$$\bar{T} = T / T_r = \frac{1}{B_0} \sum (\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i,j+1} + \bar{\phi}_{i+1,j} + \bar{\phi}_{i+1,j+1}) \cdots (4)$$

なお K は、 $\tau_{\max} = K = M_{\max} \{(\partial \bar{\phi} / \partial x)^2 + (\partial \bar{\phi} / \partial y)^2\}^{1/2} G A \omega_r$ で与えられ、

ω_r は 2 次値をとる。 $\omega_r = K / G A \sqrt{A_0}$ 、ただし、 $A_0 = M_{\max} \{(\partial \bar{\phi} / \partial x)^2 + (\partial \bar{\phi} / \partial y)^2\}^{1/2}$, $x = x_0, y = y_0$ 、

以上により断面を等分割して 各々の分割点で式(3)を求めれば、図-2

ϕ の算定式が導かれる。(これを解いて) 式(4)より 捩りモーメント T が 直ちに求まることになる。

III 実用公式 以上の結果を用いて $T-\bar{\omega}$ 曲線の実用式を導けば、次のようになる。

いま $T-\bar{\omega}$ 曲線を $1/\bar{\omega}$ の 3 次式と仮定すれば、 $\bar{T} = A + B/\bar{\omega} + C/\bar{\omega}^2 + D/\bar{\omega}^3$ (5)

式(5)の係数は、最小自乗法により 3 次式にて決定される

$$\begin{bmatrix} \sum 1.0 & \sum 1/\bar{\omega} & \sum 1/\bar{\omega}^2 & \sum 1/\bar{\omega}^3 \\ \sum 1/\bar{\omega} & \sum 1/\bar{\omega}^2 & \sum 1/\bar{\omega}^3 & \sum 1/\bar{\omega}^4 \\ \sum 1/\bar{\omega}^2 & \sum 1/\bar{\omega}^3 & \sum 1/\bar{\omega}^4 & \sum 1/\bar{\omega}^5 \\ \sum 1/\bar{\omega}^3 & \sum 1/\bar{\omega}^4 & \sum 1/\bar{\omega}^5 & \sum 1/\bar{\omega}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \bar{T} \\ \sum \bar{T}/\bar{\omega} \\ \sum \bar{T}/\bar{\omega}^2 \\ \sum \bar{T}/\bar{\omega}^3 \end{bmatrix}$$

図-2 の 矩形、I 型、T 型各断面に対する結果を表-1 に示す。

参考文献：

* 太田 俊昭, 工学院 2 次；一様な任意形断面棒の弾塑性捩り挙動について, (44 年度研究発表論文集 土木学会西部支部編)

断面形状	横/縦	実用公式	最大誤差
正方形	1/1	$1.602 + 0.091/\bar{\omega} - 0.701/\bar{\omega}^2 - 0.007/\bar{\omega}^3$	1.4%
矩形	1/2	$1.761 - 0.108/\bar{\omega} - 0.648/\bar{\omega}^2 - 0.005/\bar{\omega}^3$	2.8%
	1/3	$1.732 - 0.144/\bar{\omega} - 0.570/\bar{\omega}^2 - 0.018/\bar{\omega}^3$	2.2%
	3/10	$1.766 - 0.369/\bar{\omega} - 0.188/\bar{\omega}^2 - 0.209/\bar{\omega}^3$	1.7%
	3/11	$1.763 - 0.406/\bar{\omega} - 0.046/\bar{\omega}^2 - 0.312/\bar{\omega}^3$	2.3%
	1/4	$1.744 - 0.377/\bar{\omega} - 0.075/\bar{\omega}^2 - 0.292/\bar{\omega}^3$	2.3%
	1/5	$1.725 - 0.447/\bar{\omega} + 0.103/\bar{\omega}^2 - 0.382/\bar{\omega}^3$	2.2%
I 型	F:3/10 W:3/11	$2.157 + 0.292/\bar{\omega} - 3.242/\bar{\omega}^2 + 1.793/\bar{\omega}^3$	1.7%
T 型	F:3/10 W:1/2	$2.293 - 0.054/\bar{\omega} - 3.035/\bar{\omega}^2 + 1.796/\bar{\omega}^3$	1.8%

ただし F: FLANGE部, W: WEB部

表-1

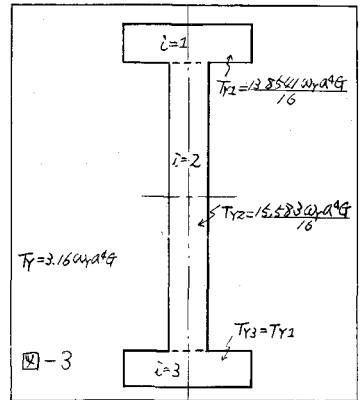


図-3

さてI型、T型断面及びL型、箱型断面等の一般断面に対して、その都度式(3)(4)(5)の計算を行って τ - $\bar{\omega}$ 曲線を導くことは非常に煩雑で不便となる。そこでこれを矩形断面の集合体とみなし表-1の結果を用いると次の一般近似公式を導くことができる。すなわち弾性限界時捩りモーメント T_0 および捩り角 θ は、弾性理論より既に求められており、また T_0 も Sand heap 理論による Sand heap の体積から容易に求められるゆえに、これらの値を既知とすることが出来る。そこで弾塑性の τ - $\bar{\omega}$ 曲線の特徴が近似的に各分割矩形断面の和で与えられるとみなせば、次式が成立する。

$$\bar{\tau} = \bar{\omega} \{ 1.5 \leq \bar{\tau} \}, \quad \bar{\tau} = f_p + \eta \{ \sum \bar{\tau}_i B_i / \bar{\omega} + \sum \bar{\tau}_i C_i / \bar{\omega}^2 + \sum \bar{\tau}_i D_i / \bar{\omega} \}, \quad (\bar{\tau} < \bar{\omega} < \infty) \quad (6)$$

ただし、 $f_p = T_0 / T_y$, $\bar{\tau}_i = T_{yi} / T_y$, B_i, C_i, D_i は分割矩形断面 i の式(5)における係数；既知数となる。

$\bar{\tau}_i$: 分割矩形断面 i の弾性限界捩りモーメント。

ここに式(6)の補正係数は、

$$\eta = f_p + \eta \{ \sum \bar{\tau}_i (B_i + C_i) + \sum \bar{\tau}_i D_i \} = 1 \quad (7)$$

よりえられる。

IV 応用例

a) I型の場合: 図-3のように筒の矩形体として構成される。この時 $f_p = 2.157$ であるから式(2)と表-1より $\eta = 1.794$ をえ、結局次のようになる。

$$\bar{\tau} = \bar{\omega} \quad (1 \leq \bar{\omega} \leq 1.7)$$

$$\bar{\tau} = 2.175 - 0.587/\bar{\omega} - 0.210/\bar{\omega}^2 - 0.378/\bar{\omega}^3 \quad (1.7 \leq \bar{\omega} < \infty)$$

式(9)の厳密解と比較すれば、図-4のようになり、最大誤差は $\bar{\omega} = 1.7$ の時 4.5% である。

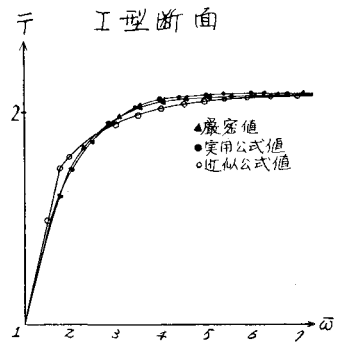


図-4

V 結論 本研究によって、矩形断面及びI型T型更にはL型、箱型断面等を対象として、弾塑性捩りモーメントと捩り角に関する近似一般公式が誘導された。図-4に示されるように、近似公式の定量的な特性は厳密値とよく合致し、また定量的な面においては、本例の太肉断面の場合でも高々4.5%に止めうる。長辺/短辺が4~ ∞ の薄肉断面では、精度は更に高くなるものと予測できる。従って、本近似式は一般断面に対して、充分実用的といううる。

尚、本研究は、熊本大学の吉村教授に示唆されること大であり、ここに記して謝意を表する。

また、計算は、本学の電子計算機 FACOM 270-20/30 を使用した。