

1. 緒言 弾塑性安定問題に關する既述研究では、いずれも算上の難点から、特定の荷重状態および構造を対象として限界荷重が算定されてゐるに過ぎず、未だ十分広汎な種類の骨組構造を網羅した弾塑性安定論を体系的に確立するまでには至っていない。そこで本研究は、任意の載荷条件ならびに境界条件をもつ複雑な骨組構造に広く適用でき、かつ機械的な演算が可能な弾塑性安定問題の汎用解析法の確立を企図したものである。すなわち、板構造のモデル化の一手法として提案された "Newmark's plate analog" の概念を拡張適用して、部材と剛棒と弾塑性ヒンジとで構成される beam analog なるものに置き換えて本題の基礎式を誘導し、その活用を図つたものである。

2. 基礎式の誘導 beam analog は次のとき特性をもつものとする (図-1 参照)。(1) 棒は重さがなく変形しない。(2) 荷重はヒンジ部に集中して作用する。(3) 弾塑性ヒンジの部材軸方向の寸法は零である。(4) 応力とひずみはヒンジ部のみ生じ、それらの値はヒンジまたはその両区間の平均値と解釈する。これより、剛棒 $i(i+1)$ に對するモーメントの釣合式を立てると、次式が得られる。

$$V_{i(i+1)} = (M_{i+1} - M_i) / \Delta - N(u_{i+1} - u_i) / \Delta \quad (1)$$

ここに、 $V_{i(i+1)}$: 剛棒 $i(i+1)$ のせん断力、 M_i : ヒンジ i におけるモーメントでヒンジを中心とする区間の平均値、 Δ : 剛棒の長さ、 i : ヒンジのたわみ、 N : 軸力。

また、ヒンジ i における力の釣合式 $V_{i(i+1)} - V_{i(i-1)} = Q_i$ (但し、 Q_i : ヒンジ i に作用する荷重) であり、これを式(1)代入すれば、 $M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} - N(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})) = -\Delta Q_i$ ----- (2)

一方、ヒンジ i のひずみは $\epsilon_i = (u_{i(i+1)} - u_{i(i-1)}) / \Delta$ 。ここに、 $u_{i(i+1)}$: ヒンジ i において $i(i+1)$ 区間の軸方向変形長。 $u_{i(i-1)} = (u_i - u_{i-1}) \Delta / \Delta$, $u_{i(i+1)} = (u_{i+1} - u_i) \Delta / \Delta$ であるから、結局 ϵ_i として次式が得る。

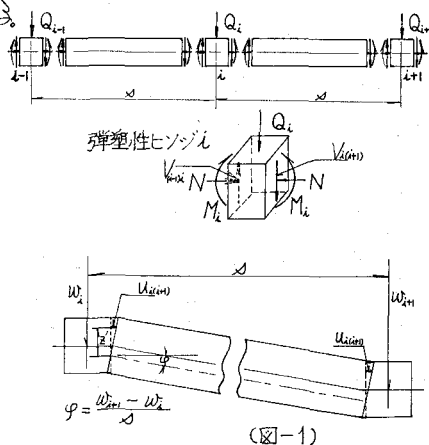
$$\epsilon_i = (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \Delta / \Delta^2 = -\phi_i \Delta \quad (3)$$

ここに、 $\phi_i = -(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) / \Delta^2$ (曲率)。 Δ : 断面の中立軸からの位置。

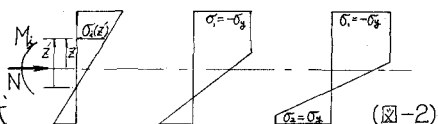
$\sigma_i - \epsilon_i$ の関係として、 I_{xx} の理想塑性体を仮定する。しかるとき応力

$\sigma_i(x)$ は弾性域では $\sigma_i(x) = E(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \Delta / \Delta^2$, 塑性域では $\sigma_i(x) = \pm \sigma_y$ である (但し、 E : ヤング率, σ_y : 降伏応力)。部材断面を z 軸とすると、各応力状態 (図-2 参照) のモーメント M_i とたわみ u_i との関係が、 $M_i = -b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(z) dz$, $N = -b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(z) dz$ の2式から次のように算定される (但し、 z : 断面の中心軸からの距離)。なお、第1・第2弾塑性状態においては $M_i - \phi_i$ 曲線が非線型となるゆえ、エネルギー等直条件を以て2本の近似直線 (図-3 参照) に置換し、演算の簡略化を行なつた。

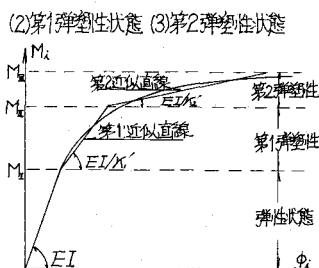
$$m_i = \sigma_i - \beta_i (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \quad (4)$$



(図-1)



(図-2)

(図-3) $M_i - \phi_i$ 関係

但し、

$$\delta_i = \begin{cases} 0 \\ \pm (1 - 1/\kappa_i') m_x \\ \pm \{ (1 - \kappa_i'/\kappa_i'') m_{12} + (\kappa_i'/\kappa_i'') (1 - 1/\kappa_i') m_x \} \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} \kappa_i^2/\alpha^2 & \text{--- [ヒンツガ弾性状態]} \\ \kappa_i^2/(\kappa_i \alpha^2) & \text{--- [第1弾塑性状態]} \\ \kappa_i^2/(\kappa_i \alpha^2) & \text{--- [第2弾塑性状態]} \end{cases}$$

ここに、 $m_x = M_x/Nh$, m_x, m_x, m_{12} : 弾性状態第1第2弾塑性状態の限界モーメント M_x, M_{12}, M_{12} を無次元化 (Nh^2 割る) したもので、 $m_x = (\sigma_y/\sigma_0)/6$, $m_{12} = (2\sigma_0/\sigma_y + 1)m_x$, $m_{12} = (\sigma_y/\sigma_0)(1 - \sigma_0^2/\sigma_y^2)/4$, κ_1, κ_2 : 第1第2近似的直線の勾配を表わし、エネルギー等値条件により、次のごとく表わされる。

$$\begin{cases} \kappa_1 = (\kappa_2^2 - \kappa_1^2 + 2m_x/3) / (\kappa_2 - \kappa_1)^2, & \kappa_1' = \kappa_1 + 1 \\ \kappa_2 = \{ \kappa_1^2 - \kappa_2^2 - \kappa_1 (\kappa_2 - \kappa_1)^2 + 2m_x/3 \\ \quad + m_{12} \sqrt{1 - m_{12}/m_x} / (3\sqrt{3}\sigma_0^2(1 - \sigma_0^2/\sigma_y^2)(4\sigma_y^2)) \} / (\kappa_2 - \kappa_1)^2 \\ \kappa_2' = \kappa_2 + \kappa_1' \end{cases}$$

$y_i = \omega_i/h$, $\sigma_0 = N/A$, $\alpha = \sqrt{3}\sigma_y/E$, $\lambda = l/n$, λ : 細長比, l : 部材長, n : 分割数, δ_i の符号: モーメント m_{12} の正負値と対応する (すなわち第1第2弾塑性状態の場合はモーメントの正負値を反する必要がある)。

以上より、式(2)を無次元化した式:

$$m_{12} - 2m_{11} + m_{1-1} - (y_{12} - 2y_{11} + y_{1-1}) = -\frac{\sqrt{3}\lambda}{6n} \frac{Q_1}{N}$$

に式(4)を代入すれば本論の基礎式が得られ次のごとくである。

$$A_{i-2} y_{i-2} + A_{i-1} y_{i-1} + A_i y_i + A_{i+1} y_{i+1} + A_{i+2} y_{i+2} = B_i$$

$$\text{但し、} \begin{cases} A_{i-2} = -\beta_{i-1}, & A_{i-1} = 2(\beta_{i-1} + \beta_i) - 1, \\ A_i = -(\beta_{i-1} + 4\beta_i + \beta_{i+1}) + 2, & A_{i+1} = 2(\beta_i + \beta_{i+1}) - 1, \\ A_{i+2} = -\beta_{i+1}, & B_i = -\frac{\sqrt{3}\lambda}{6n} \frac{Q_1}{N} - (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \end{cases} \quad (5)$$

式(5)を各ヒンズ点について求め、それらを連立に解くことにより、はりの弾塑性安定に対する限界荷重が算定されることとなるが、その演算プログラムをフローチャートに示せば図-4のごとくである。

3. 精度の吟味 部材の分割数 n と精度の関係を3つの具体例について検討した結果、 $n=20$ 程度で十分な精度が得られることが確かめられた。なお、 $n=20$ の場合、限界荷重1個を求めるときに要する演算時間は FACOM-230-60 を用いる場合、僅か数秒である。次に、単純ばり、軸

力の他に(1)中央集中荷重(2)満載等分布荷重を受ける場合について、Jezekの厳密解と本法による結果とを比較すれば図-5に示すとうりである。図より、本法が厳密解と比較的よく一致することがわかり、本法の妥当性が十分証明される。

4. 結論 本論文は、beam analog により部材をモデル化することによって、一般に数学的手法によって導かれる弾塑性安定問題の基礎式を力学的な内容の把握から誘導することと可能ならしめるとともに、その精度と吟味検討して、力学的手法が実用上十分妥当であることが明白に示した。このことは、単純ばりやラーメン等の最近構造は勿論のこと、数学的に取り扱いの煩雑な板構造やツル構造板(お節構造)など極めて複雑な構造形式の弾塑性安定問題の基礎式も比較的簡明に導くことととも、本論文の統一体系化され、汎用解法の確立に資することと大きく貢献していると断言する。

(参考文献) 1) A. Aziz: The development of a distribution procedure for the analysis of continuous rectangular plates, American Civil Engineering Studies - Structure Research Series Report 176, May 1959.

