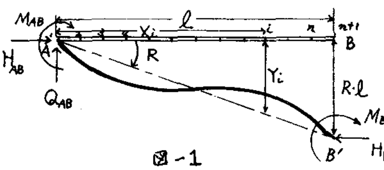
I－9　　不安定問題に関する一般理論（剛接トラス橋およびラーメン橋）

宮崎大学工学部　○学生員　森　弘光
〃　〃　正　員　太田俊昭

Ⅰ．まえがき　軸力と曲げモーメントを同時に受ける骨組構造物に塑性設計法を適用するには、その前提条件として構造物の安定性に関する検討が必要となる。本論文は、任意の変動軸力と曲げモーメントの組合せ負荷を受ける任意形断面の直線部材を対象として、安定問題の基礎式になる、いわゆる弾塑性座屈たわみ角式を一般的に誘導し、変形法による直線材骨組構造物の弾塑性安定性に関する一般理論の確立を図ったものである。

Ⅱ．一般理論　任意の軸力と曲げモーメントの組合せ負荷を受ける図－1の部材ABを適当な数れに等分割すれば、一般に、i点のモーメントM_iは図－1の記号を参照して、



図－1

$$M_i=M_{AB}+H_{AB}\cdot Y_i+Q_{AB}\cdot X_i+M_i^{\circ}\ ,\ (i=1,2,\cdots\cdots) \quad\text{------}\ (1)$$

ここに、$Q_{AB}=-(M_{AB}+M_{BA}+H_{AB}\cdot R\cdot\ell)/\ell+Q_{AB}^{\circ}$　，　Q_{AB}°：荷重による端せん力 ---------------- (2)

したがって、式(2)を式(1)に代入して、無次元化すると、

$$\bar{M}_i=(1-\bar{X}_i)\bar{M}_{AB}+(-\bar{X}_i)\bar{M}_{BA}+r_0\bar{H}_{AB}\bar{Y}_i+r_0\bar{H}_{AB}R(-\bar{X}_i)+\bar{M}_i^{\circ} \quad\text{----------------}\ (3)$$

ただし、$\bar{M}_i=M_i/M_Y$，$\bar{X}_i=X_i/\ell$，$\bar{Y}_i=Y_i/\ell$，$r_0=\ell N_Y/M_Y$，$\bar{H}_{AB}=H_{AB}/N_Y$，$\bar{M}_i^{\circ}=(M_i^{\circ}+Q_{AB}^{\circ}X_i)/M_Y$，$M_i^{\circ}$：中間荷重による$i$点のモーメント，$M_Y,N_Y$：降伏曲げモーメントおよび降伏軸力

式(3)を行列表示すると、

$$[\bar{M}]=[1-\bar{X}]\bar{M}_{AB}+[-\bar{X}]\bar{M}_{BA}+r_0\bar{H}_{AB}[\bar{Y}]+r_0\bar{H}_{AB}R[-\bar{X}]+[\bar{M}^{\circ}] \quad\text{----------------}\ (4)$$

材端A, Bの回転角$\theta_A\theta_B$は、部材ABに貯えられる補正エネルギー$U=\int_A^B\phi\,dM\,ds$を変分して、

$$\left.\begin{aligned}\theta_A-R&=\frac{\partial U}{\partial M_{AB}}=\int_A^B\phi\frac{\partial M}{\partial M_{AB}}ds=\omega([a][\bar{\Phi}]+a_B\bar{\Phi}_B)\\ \theta_B-R&=\frac{\partial U}{\partial M_{BA}}=\int_A^B\phi\frac{\partial M}{\partial M_{BA}}ds=\omega([b][\bar{\Phi}]+b_B\bar{\Phi}_B)\end{aligned}\right\}\text{---}(5)$$

ただし$\omega=\phi_Y\ell$，$\bar{\Phi}=\phi/\phi_Y$，ϕ_Y：降伏曲率，ϕ_B：B点の曲率

一方、たわみY_iは、$Y_i=X_i\theta_A-\int_0^{X_i}\phi(X_i-X)dX$で与えられるゆえ、これを行列表示して、

$$[Y]=[X]\theta_A-\omega\{[\alpha][\bar{\Phi}]+[\beta]\bar{\Phi}_B\} \quad\text{----------------}\ (6)$$

次に、各分割点の曲率Φは、文献(1)より

$$[\bar{\Phi}]=\begin{bmatrix}\eta_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & & \eta_n\end{bmatrix}[\bar{M}]+[\xi]=[\eta][\bar{M}]+[\xi] \quad\text{-------}\ (7)$$

$$\bar{\Phi}_B=-\eta_B\bar{M}_{BA}+\xi_B \quad\text{-------------}\ (8)$$

式(7)に式(4)(6)を代入して整理すると、曲率Φが次のように求められる。

$$[\bar{\Phi}]=([1^*]+[X^*])\bar{M}_{AB}+[X^*]\bar{M}_{BA}-\bar{H}_{AB}^*(\theta_A-R)[X^*]+[M^*]+[\xi^*])-\omega\bar{H}_{AB}^*\bar{\Phi}_B[\beta^*] \quad\text{-----------}\ (9)$$

ただし、$[\xi]=[I]+\omega\bar{H}_{AB}^*[\eta][\alpha]$，$[I]$：単位行列　，　$\bar{H}_{AB}^*=r_0\bar{H}_{AB}$　，　$[\xi]^{-1}[\eta][1]=[1^*]$，

$[\xi]^{-1}[\eta][-\bar{X}]=[X^*]$　，　$[\xi]^{-1}[\eta][\bar{M}^{\circ}]=[M^*]$　，　$[\xi]^{-1}[\eta][\beta]=[\beta^*]$，$[\xi]^{-1}[\xi]=[\xi^*]$，$[\xi]^{-1}$：$[\xi]$の逆行列

さて、式(9)の結果を用いて、式(5)を変形すれば、

$$\theta_A-R=\omega\{\{[a][1^*]+[a][X^*]\}\bar{M}_{AB}+[a][X^*]\bar{M}_{BA}-H_{AB}^*(\theta_A-R)[a][X^*]+[a][M^*]+[a][\xi^*]-\omega\bar{H}_{AB}^*\bar{\Phi}_B[a][\beta^*]+a_B\bar{\Phi}_B\}$$

ここで、$\beta_a=a_B-\omega\bar{H}_{AB}^*[a][\beta^*]$とおき、式(8)を代入のうえ　整理すれば、

$$\{1+\omega\bar{H}_{AB}^*[a][X^*]\}(\theta_A-R)=\omega\{\{[a][1^*]+[a][X^*]\}\bar{M}_{AB}+\{[a][X^*]-\beta_a\eta_B\}\bar{M}_{BA}+[a][M^*]+[a][\xi^*]+\beta_a\xi_B\} \quad\text{-----}\ (10)$$

同様に、$\beta_b=b_B-\omega\bar{H}_{AB}^*[b][\beta^*]$とおいて、整理すると、

$$\omega\bar{H}_{AB}^*[b][X^*]\theta_A+\theta_B-(1+\omega\bar{H}_{AB}^*[b][X^*])R=\omega\{[b]\{[1^*]+[X^*]\}\bar{M}_{AB}+\{[b][X^*]-\beta_b\eta_B\}\bar{M}_{BA}+[b][M^*]+[b][\xi^*]+\beta_b\xi_B\} \quad\text{--}\ (11)$$

式(10)(11)を$\bar{M}_{AB},\bar{M}_{BA}$について連立に解けば、所要の一般化された弾塑性座屈たわみ角式が次のように

求められる。

$$\begin{Bmatrix}\bar{M}_{AB}\\ \bar{M}_{BA}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\omega}[A]^{-1}[B]\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\\ R\end{Bmatrix}-[A]^{-1}\begin{Bmatrix}C_{11}\\ C_{12}\end{Bmatrix} \quad \text{-----------------} \ (12)$$

ただし、$[A]=\begin{bmatrix}[a]\{[1^*]+[X^*]\} & [a][X^*]-\beta_a\eta_B\\ [b]\{[1^*]+[X^*]\} & [b][X^*]-\beta_b\eta_B\end{bmatrix}$, $[B]=\begin{bmatrix}\{1+\omega\bar{H}^*_{AB}[a][X^*]\} & 0 & -\{1+\omega\bar{H}^*_{AB}[a][X^*]\}\\ \omega\bar{H}^*_{AB}[b][X^*] & 1 & -\{1+\omega\bar{H}^*_{AB}[b][X^*]\}\end{bmatrix}$,

$$\begin{Bmatrix}C_{11}\\ C_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[a][M^*]+[a][\xi^*]+\beta_a\xi_B\\ [b][M^*]+[b][\xi^*]+\beta_b\xi_B\end{bmatrix}$$

ここで、式(2)に式(12)を代入して、$\bar{Q}_{AB}=Q_{AB}/N_Y$を求めれば、結局 A,B点のX,Y軸方向の節点変位成分を有す変位ベクトル$\bar{\boldsymbol{\delta}}_A,\bar{\boldsymbol{\delta}}_B$を用いて次のように簡略表示される。

$$\bar{Q}_{AB}=\alpha_1\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix}+\beta_1\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\delta}}_A\\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_B\end{bmatrix}+\gamma_1 \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}_A=(\bar{\delta}^X_A \ \ \bar{\delta}^Y_A)^T,\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_B=(\bar{\delta}^Y_B\ \bar{\delta}^Y_B)^T, \ \text{-----------------} \ (13)$$

式(12)も同様な式形に改めれば、

$$\bar{M}_{AB}=\alpha_2\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\delta}}_A\\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_B\end{bmatrix}+\gamma_2 \quad \text{-----------------} \ (14)$$

一方、軸力N_{AB}は、$N_{AB}=EA\sigma=EA\,l_{AB}(\varepsilon_{AB}-\varepsilon^*_{AB})=EA\,l_{AB}(\bar{\delta}^X_B-\bar{\delta}^X_A-\varepsilon^*_{AB})$となるゆえ、同じく次のように示めされる。

$$\bar{N}_{AB}=N_{AB}/N_Y=\alpha_3\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix}+\beta_3\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\delta}}_A\\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_B\end{bmatrix}+\gamma_3 \quad , \quad \alpha_3 \text{:零行列} \ , \ \gamma_3\text{:荷重および塑性項} \ \text{---------} \ (15)$$

式(13)(14)(15)は、(X,Y)座標を空間に固定された別の絶対座標(x,y)に変換する行列$[T]$を用いて、次のように変形される。

$$\bar{\mathbf{F}}_{AB}=\begin{Bmatrix}\bar{F}^x_{AB}\\ \bar{F}^y_{AB}\end{Bmatrix}=[T]\begin{Bmatrix}\bar{Q}_{AB}\\ \bar{N}_{AB}\end{Bmatrix}=[T]\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix}+[T]\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_3\end{Bmatrix}[T]^T\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_A\\ \boldsymbol{\Delta}_B\end{Bmatrix}+[T]\begin{Bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_3\end{Bmatrix} \quad \text{-------------} \ (16)$$

$$\bar{M}_{AB}=[T][\alpha_2]\begin{Bmatrix}\theta_A\\ \theta_B\end{Bmatrix}+[T][\beta_2][T]^T\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_A\\ \boldsymbol{\Delta}_B\end{Bmatrix}+[T][\gamma_2] \quad , \quad \text{ただし、}[\boldsymbol{\delta}]=[T]^T[\boldsymbol{\Delta}] \ , \ \boldsymbol{\Delta}\text{:}(x,y)\text{座標変位ベクトル} \ (17)$$

Ⅲ. 剛接トラス橋およびラーメン橋の安定問題

剛接トラス橋やラーメン橋などの安定問題に対する一般解法を概説する。上記誘導の式(16)(17)を用いて、節点での釣り合い式を求めれば、

$$\Sigma\bar{\mathbf{F}}_{AB}=\mathbf{P}_A \quad , \quad \Sigma\bar{M}_{AB}=0 \quad , \qquad \text{ただし、}\mathbf{P}_A\text{:節点}A\text{に働く外力}, \ \text{-----------} \ (18)$$

式(18)を支点を除く全節点で求め、これを次のように一括表示する。

$$\left[\begin{array}{c|c}K_{ss} & K_{sr}\\ \hline K_{rs} & K_{rr}\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\Delta_s\\ \boldsymbol{\Delta}_r\\ \boldsymbol{\Theta}_r\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\Sigma\bar{F}^\circ_s\\ \Sigma\bar{\mathbf{F}}^\circ_r\\ \Sigma\bar{M}^\circ_r\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_s\\ 0\\ 0\\ \vdots\end{Bmatrix} \quad ,$$

ただし、添字sは特定の荷重P_sの働く節点を表わし、添字rはその残りの節点を総称する。 ---------- (19)

$\bar{F}^\circ,\bar{\mathbf{F}}^\circ,\bar{M}^\circ$:荷重及び塑性項,

式(19)を解けば、

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_r\\ \boldsymbol{\Theta}_r\end{Bmatrix}=-[K_{rr}]^{-1}[K_{rs}]\Delta_s-[K_{rr}]^{-1}\begin{Bmatrix}\Sigma\bar{\mathbf{F}}^\circ_r\\ \Sigma\bar{M}^\circ_r\end{Bmatrix} \quad \text{-------------} \ (20)$$

$$P_s=\{[K_{ss}]-[K_{sr}][K_{rr}]^{-1}[K_{rs}]\}\Delta_s+\Sigma\bar{F}^\circ_s-[K_{sr}][K_{rr}]^{-1}\begin{Bmatrix}\Sigma\bar{\mathbf{F}}^\circ_r\\ \Sigma\bar{M}^\circ_r\end{Bmatrix} \quad \text{-----------------} \ (21)$$

すなわち、特定点Sの変位Δ_sを与えて、式(20)より$\boldsymbol{\Delta}_r\,\boldsymbol{\Theta}_r$を求め、次いで 式(15)(16)(17)より モーメントと軸力を決定し、弾性塑性の判別プログラムを用いて[1] 式(7)の$[\eta]$, $[\xi]$を定める。これより 式(15)〜(19)の各式の係数行列が補正され、その結果より同様にして 新たな$[\eta]$, $[\xi]$が計算される。このような演算をくり返し行ない 収束に致れば、式(21)より最終的に Δ_sに対するP_sを決定する。このようにして $P_s-\Delta_s$ Curve を定め、極大値を生ずる点(P_{sc},Δ_{sc})を求めれば、その点の荷重P_{sc}が安定限界荷重[2]を与える。

Ⅳ. 参考文献

(1). 山崎,石川,松隈;「くり返し荷重を受けるラーメンの弾塑性安定」, 土木学会西部支部研究発表論文集 昭和44年2月

(2). 菊池,太田 ;「軸力と曲げモーメントを受ける直線部材の安定に関する一考察」, 土木学会西部支部研究発表論文集 昭和45年2月