

I - 8 偏心円孔を有する正方形板の曲げ

九州大学工学部 正 員 村上 正
同 同 後藤恵之輔
同 学生員 ○富吉純司

1. 序言

有孔板の解析は、古く1930年頃より行なわれている。しかし、在来の研究のほとんどは、無限板に限定されており、有限板を取り扱ったものは余り見受けられないようである。本研究は、有孔板に関する研究の一つとして、中心に円孔をもつ場合を含め偏心円孔を有する正方形板の解法を述べるもので、荷重は均載等分布荷重とし、解法には選点法を用いる。

2. 基礎方程式

平板が横荷重 p を受けるとき、基礎微分方程式は次式で与えられる。

$$\nabla^4 w = p/D \quad (1)$$

ここに、 w : 板のたわみ、 D : 板の曲げ剛性

式(1)の一般解は、特解を w_p として次式のごとく極座標表示される。

$$w = w_p + (A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r) + (A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r) \cos \theta + (A_1' r + B_1' r^3 + C_1' r^{-1} + D_1' r \ln r) \sin \theta + \sum_{m=2}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}) \cos m\theta + \sum_{m=2}^{\infty} (A_m' r^m + B_m' r^{-m} + C_m' r^{m+2} + D_m' r^{-m+2}) \sin m\theta \quad (2)$$

ここに、 $A_0 \sim D_m$ は境界条件より決定される係数である。

3. 中心に円孔を有する正方形板の解法

図-1に示すごとく、等分布荷重を均載し中心に円孔(半径 R)を有する正方形板のたわみ関数は、式(2)より対称性を考慮して次式のごとく表わされる。

$$w = \frac{\gamma_0}{64D} r^4 + (A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r) + \sum_{m=2,4,12}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}) \cos m\theta \quad (3)$$

ここに、 γ_0 : 等分布荷重強度

円孔縁は自由とし、外縁は固定支持とすれば、境界条件式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} r = R \text{ において } M_r &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} \right\} = 0 \\ V_r &= -D \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} x = \pm b \text{ および } y = \pm b \text{ に沿うて } W &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 ν : 板材料のポアソン比、 n : 境界に立てた法線

式(3)を式(4)に代入すれば、4種の未定係数のうち C_m, D_m が A_m, B_m の関数としてえられる。したがって、式(5)の境界条件式は A_m, B_m のみに関する方程式となる。この連立方程式を直接解く

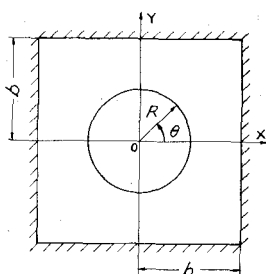


図-1 中心に円孔を有する正方形板

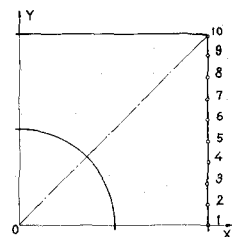


図-2 選点の数と位置

ことは困難である故、ここでは選点法を用いて解き、たわみ関数の係数はすべて決定される。

4. 偏心円孔を有する正方形板の解法

偏心円孔については、図-3に示すとき2種の位置にあるものを取り扱う。

たわみ関数は、type 1, 2ともに共通の次式で表わされる。

$$W = \frac{R_0}{64D} r^4 + (A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r) \\ + (A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r) \cos \theta \\ + \sum_{m=2,3,4}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m/2} + D_m r^{-m/2}) \cos m\theta$$

円孔縁における境界条件式より4種の未定係数のうち C_m, D_m が A_m, B_m の関数として求められ、外縁の境界条件式に選点法を適用することにより、 A_m, B_m が決定される。

5. 計算例

中心に円孔を有する正方形板について、孔縁に沿うたわみおよび曲げモーメントを、それぞれ図-4, 5に示す。 $R/b=0.2$ のとき、たわみ、曲げモーメントが孔の無いとき($R/b=0$)よりも大きな値となることは注目に値する。図-6は $R/b=0.5$ のときの主曲げモーメントの分布を示すものである。

なお、ポアソン比は $\nu=0.3$ とし、選点は図-2に示すごとく採った。

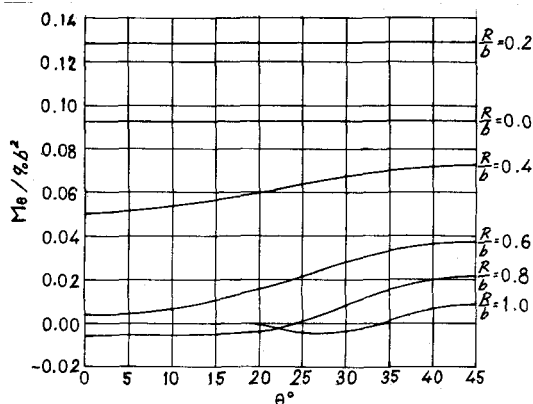


図-5 孔縁に沿う曲げモーメントの分布

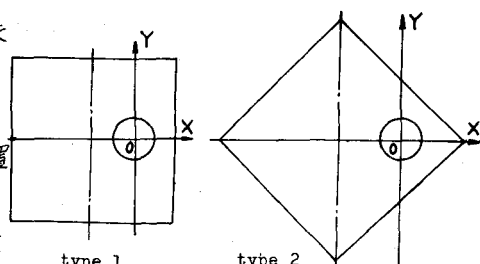


図-3 偏心円孔を有する正方形板

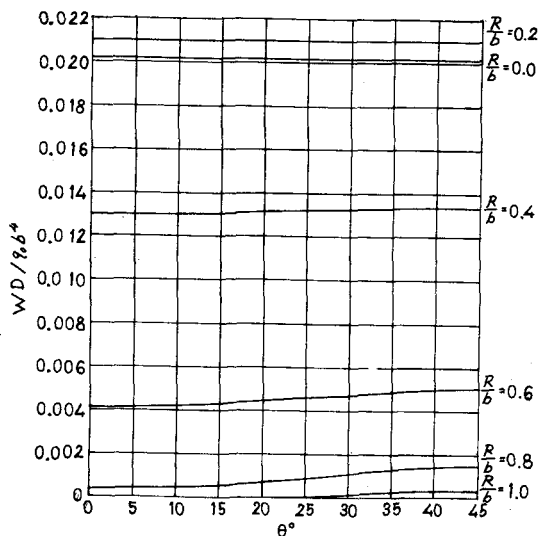


図-4 孔縁に沿うたわみ

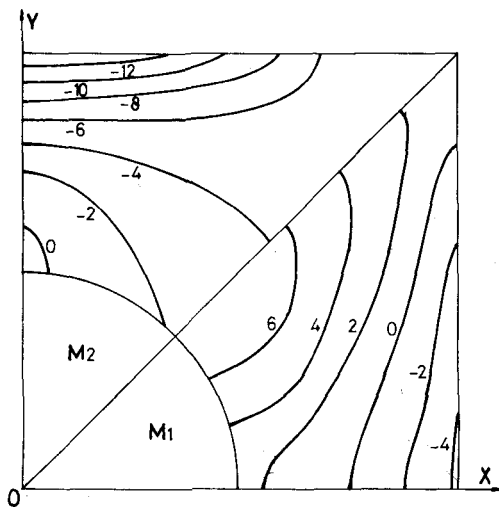


図-6 主曲げモーメント M_1, M_2
($\times 10^{-2} \% b^2$), $R/b=0.5$