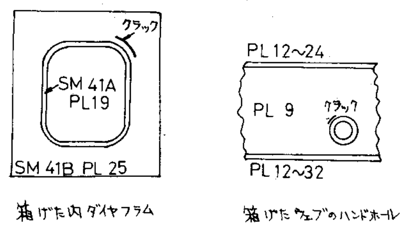
I－4　リングで補強された円孔をもつはりの応力解析

九州大学　工学部　学生員　○梅本　明宏
九州大学　工学部　正　員　後藤恵之輔

1　序

箱げたや橋脚のダイヤフラムおよびラーメンのはりなどには、マンホールや配管用の孔が穿かれていることが多い。これら孔の縁には通常、応力集中緩和のため、リング状フランジを溶接して補強を施すが、リングとはりとの結合部でクラックが発生している例はよく見られるところである。（図－1参照）

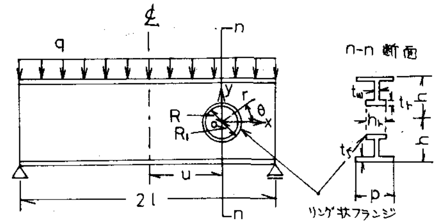
著者らは、かかる有孔板および有孔ばりに関する研究の一つとして、さきに補強円孔を有するはりを取扱い、補強リングのヤング率および厚さと応力集中との関係を求め、この種リングの補強効果を明らかにした。[1] 本研究では、さらにすすめて、孔縁に上記補強を施した場合のはりの応力を解析し、応力集中に対するリング状フランジの補強効果を調べた。なお、問題は2次元混合境界値問題と見なし、解は複素変数法によって求めることとする。



図－1　クラックの発生例

2、I型単純ばりの応力関数の誘導および応力の算定

図－2に示すごとく、等分布荷重を満載するI型単純ばりを考え、リング状フランジの厚さをt_rとし、幅をh_rとする。



図－2

A、応力関数の一般式

応力関数を$\Phi(z)$, $\Psi(z)$とすれば、これらは、はりおよびリングに対してそれぞれ次のごとく仮定される。

はりに対して
$$\left.\begin{aligned} {}_b\Phi(z) &= {}_b\Phi_0(z) + {}_b\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{K} A_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \\ {}_b\Psi(z) &= {}_b\Psi_0(z) + {}_b\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{K} B_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \end{aligned}\right\} (1)$$

リングに対して
$$\left.\begin{aligned} {}_r\Phi(z) &= \quad {}_r\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k} \\ {}_r\Psi(z) &= \quad {}_r\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k} \end{aligned}\right\} (1)_b$$

ここに$z = x + iy = re^{i\theta}$, (x, y)：孔中心を原点とする直角座標, (r, θ)：極座標で、添字"0"の関数は孔が無いときの応力関数，添字"1"のそれは孔の存在による付加応力関数である。

B、孔が無いときの応力関数

図－2に示すごとき荷重場における孔が無いときの応力関数は、次式のごとく決定される。

$$\left.\begin{aligned} {}_b\Phi_0(z) &= \frac{q}{16I}\left[-\frac{i}{6}z^4 - \frac{2iu}{3}z^3 + i\left(l^2 - u^2 + \frac{3}{5}c^{*2}\right)z^2 - \frac{4}{3}c^{*3}z\right] \\ {}_b\Psi_0(z) &= \frac{q}{16I}\left[8c^{*2}\left(-\frac{c^*}{3} + iu\right)z + i\left(-l^2 + u^2 + \frac{17}{5}c^{*2}\right)z^2 + i\frac{4}{3}uz^3 + i\frac{1}{2}z^4\right] \end{aligned}\right\} (2)$$

ここにl：½スパン，I：もとの孔をもたないI型ばりの中立軸に関する断面2次モーメント，

$c^{*} = h\sqrt{1+2pt_s/t_w h}$ ：換算けた高

C、付加応力関数の決定

(a) 境界条件式　孔縁($r=R$)には通常何らの外力も作用してないゆえ，孔縁における境界条件式として次式が成立する。

$$
\left.\begin{aligned}
&{}_r\Phi(t) + t\,{}_r\overline{\Phi'(t)} + {}_r\overline{\Psi(t)} = 0 \\
\text{共役式をとって}\quad &{}_r\overline{\Phi(t)} + \bar{t}\,{}_r\Phi'(t) + {}_r\Psi(t) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (3)
$$

ここに　$t = Re^{i\theta}$

(b) 連続条件式　はりとリングとの結合部($r=R_1$)においては，応力および変位が連続せねばならない。すなわち、はりのヤング率、ポアソン比をE_b, ν_bとし、リングのそれらをE_r, ν_rとして、次の連続条件式が成立する。

$$
\left.\begin{aligned}
&t_w\{{}_b\Phi(t_1) + t_1\,{}_b\overline{\Phi'(t_1)} + {}_b\overline{\Psi(t_1)}\} = h_r\{{}_r\Phi(t_1) + t_1\,{}_r\overline{\Phi'(t_1)} + {}_r\overline{\Psi(t_1)}\},\ \frac{1}{\mu_b}[\kappa_b\,{}_b\Phi(t_1) - t_1\,{}_b\overline{\Phi'(t_1)} - {}_b\overline{\Psi(t_1)}] = \frac{1}{\mu_r}[\kappa_r\,{}_r\Phi(t_1) - t_1\,{}_r\overline{\Phi'(t_1)} - {}_r\overline{\Psi(t_1)}] \\
&\text{共役式をとって} \\
&t_w\{{}_b\overline{\Phi(t_1)} + \bar{t}_1\,{}_b\Phi'(t_1) + {}_b\Psi(t_1)\} = h_r\{{}_r\overline{\Phi(t_1)} + \bar{t}_1\,{}_r\Phi'(t_1) + {}_r\Psi(t_1)\},\ \frac{1}{\mu_b}\{\kappa_b\,{}_b\overline{\Phi(t_1)} - \bar{t}_1\,{}_b\Phi'(t_1) - {}_b\Psi(t_1)\} = \frac{1}{\mu_r}[\kappa_r\,{}_r\overline{\Phi(t_1)} - \bar{t}_1\,{}_r\Phi'(t_1) - {}_r\Psi(t_1)]
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

ここに　$t_1 = R_1 e^{i\theta}$

$\mu_b = E_b/2(1+\nu_b)$　, $\kappa_b = (3-\nu_b)/(1+\nu_b)$

$\mu_r = E_r/2(1+\nu_r)$　, $\kappa_r = (3-\nu_r)/(1+\nu_r)$

(c) 付加応力関数の決定　式(3),(4)に式(1),(2)を代入してCauchy積分を行ない、zの同一べき数の係数を比較すれば、未定係数$a_1\sim a_4$, $b_1\sim b_4$, $C_1\sim C_4$, $c_1\sim c_4$, $D_1\sim D_4$および$d_1\sim d_6$に関する連立方程式がえられる。これらを連立に解くことにより，付加応力関数${}_b\Phi_1(z)$, ${}_b\Psi_1(z)$および${}_r\Phi_1(z)$, ${}_r\Psi_1(z)$が決定され，所要の応力関数${}_b\Phi(z)$, ${}_b\Psi(z)$および${}_r\Phi(z)$, ${}_r\Psi(z)$がそれぞれ次のごとく求められることとなる。

$$
\left.\begin{aligned}
\text{はりに対して}\quad &{}_b\Phi(z) = A'_1 z + iA''_2 z^2 + iA''_3 z^2 + iA''_4 + (a'_1 + ia''_1)z^{-1} + (a'_2 + a''_2)z^{-2} + ia''_3 z^{-3} + ia''_4 z^{-4} \\
&{}_b\Psi(z) = (B'_1 + iB''_1)z + iB''_2 z^2 + iB''_3 z^3 + iB''_4 z^4 + b'_1 z^{-1} + ib''_2 z^{-2} + (b'_3 + ib''_3)z^{-3} + (b'_4 + ib''_4)z^{-4} + ib''_5 z^{-5} + ib''_6 z^{-6} \\
\text{リングに対して}\quad &{}_r\Phi(z) = C'_1 z + iC''_2 z^2 + (C'_3 + C''_3)z^3 + (C'_4 + C''_4)z^4 + iC''_5 z^5 + iC''_6 z^6 + (c'_1 + ic''_1)z^{-1} + (c'_2 + ic''_2)z^{-2} + ic''_3 z^{-3} + ic''_4 z^{-4} \\
&{}_r\Psi(z) = (D'_1 + iD''_1)z + (D'_2 + iD''_2)z^2 + iD''_3 z^3 + iD''_4 z^4 + d'_1 z^{-1} + id''_2 z^{-2} + (d'_3 + id''_3)z^{-3} + (d'_4 + id''_4)z^{-4} + id''_5 z^{-5} + id''_6 z^{-6}
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

ここにA''_1, A''_2, a'_1, a''_1などの諸係数は、はりおよびリングのヤング率E，ポアソン比νおよびリングの幅 h_rなどの関数である。

D. 応力の算定

極座標における応力成分σ_r, σ_θおよび$\tau_{r\theta}$と応力関数$\Phi(z)$, $\Psi(z)$との関係は、Kolosov - Muskhelishvili の公式より次式のとおりである。

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_r = \mathrm{Re}\left[2\Phi(z) - e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z))\right],\quad \sigma_\theta = \mathrm{Re}\left[2\Phi(z) + e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z))\right], \\
&\tau_{r\theta} = \mathrm{Im}\left[e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z))\right]
\end{aligned}\right\} \quad (6)
$$

ここにReは[ ]内の実数部を，Imは[ ]内の虚数部を示す。

したがって,所要の応力成分は式(6)に式(5)の応力関数を代入することにより決定できる。

参考文献

1) 後藤，梅本：補強円孔を有するはりの弾性応力，土木学会第25回年次学術講演会講演集