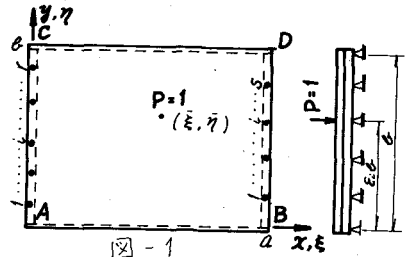


九州大学 正 員 山崎徳也

学生員 金子忠男

1. 緒言 著者らは先に矩形板-骨組複合構造物の厳密解法⁽¹⁾を発表したが、この種の複合構造物の設計にあたっては、連続ばりやラーメンなどの骨組構造物においてその影響線が極めて効力を發揮するのと同様、単位移動荷重に対する影響面が求められていれば非常に便利であることはいうまでもない。したがって本研究は板-骨組複合構造物の影響面解法の第一報として、一対辺が単純支持され他対辺が連続ばりにて弾性支持される単矩形板の影響面解法を提示するものである。

2. 解法 (1)にわみ曲面 図-1に示すごとく矩形板 ABCD が辺 AB, CD で単純支持され、辺 AC, BD でそれぞれおよび S スパンの連続ばりで弾性支持されているものとし、また、板の中立面上に右手系直角座標 (x, y, z) を導入すれば、板の z 軸方向のたわみ W は周知 α とおき次式のごときフーリエ級数の和で与えられる。



$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh \alpha_n x + B_n \cosh \alpha_n x + C_n \cosh \alpha_n x + D_n \sinh \alpha_n x) \sin n\pi y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y \sin n\pi y \quad (1)$$

ここに、 $A_n \sim D_n$: 積分定数、 $G_{mn} = 4a^2 / \{ \epsilon D \pi^2 (m^2 + n^2 / \mu^2) \}$, $D = E_p h_p^3 / \{ 12(1-\nu^2) \}$, E_p : ヤング率, h_p : 板厚, $\mu = \pi b / a$, ν : ポアソン比, m, n : 正整数, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\mu = a/b$, $\sinh$; $\sinh$, $\cosh$; $\cosh$, (ξ, η) : 荷重位置。

式(1)に含まれる 4 つの積分定数 $A_n \sim D_n$ は辺 AC, BD における境界条件により決定されるが、これらは辺 AC, BD における連続ばりには板から曲げモーメントは伝達されないものとし、また連続ばりのたわみをそれぞれ $\delta_A(\eta)$, $\delta_B(\eta)$ とすれば、次のごとくである。

$$\xi = 0 \text{ 時}, (W)_{\xi=0} = \delta_A(\eta), -D(\partial^2 W / \partial \xi^2 + \nu \partial^2 W / \partial \eta^2)_{\xi=0} = 0, \xi = 1 \text{ 時}, (W)_{\xi=1} = \delta_B(\eta), -D(\partial^2 W / \partial \xi^2 + \nu \partial^2 W / \partial \eta^2)_{\xi=1} = 0 \quad (2)$$

式(2)の $\delta_A(\eta)$, $\delta_B(\eta)$ はフーリエ級数で展開できるものと仮定し、次式のごとく表わす。

$$\delta_A(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{An} \sin n\pi \eta, \quad \delta_B(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin n\pi \eta \quad (3) \quad \text{ここに、} \delta_{An}, \delta_{Bn}: \text{任意定数}$$

式(1)および(3)を式(2)に代入すれば、 $A_n \sim D_n$ に関する連立方程式がえられ、これを解いた結果を式(1)に再代入すればたわみ曲面 W は次式のごとく書き改められる。

$$W(x, y) = a^2 / D \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_n(\xi) D \delta_{An} / a^2 + d_n(\xi) D \delta_{Bn} / a^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y \sin n\pi y \} \sin n\pi y \quad (4)$$

$$\text{ここに、} C_n(\xi), d_n(\xi): n \text{ および } \xi \text{ の関数, } \bar{G}_{mn} = 4 / \{ \mu \pi^2 (m^2 + n^2 / \mu^2) \}.$$

式(4)に含まれる未知定数 δ_{An} , δ_{Bn} は $\delta_A(\eta)$, $\delta_B(\eta)$ が辺 AC, BD における板反力 $(V_A)_{\xi=0} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{An} \sin n\pi \eta$, $(V_B)_{\xi=1} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{Bn} \sin n\pi \eta$ と垂直荷重として受ける場合の各連続ばりの示す弾性曲線に他ならぬことより決定される(文献(1)参照)。

$$\text{すなわち、} \delta_A(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{An} \sin n\pi \eta = \frac{\kappa_1 a^2}{\mu D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n^2} (A V_{An} - \frac{2}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} R_m^A \sin m\pi \eta \sin n\pi \eta) \sin n\pi \eta \quad (5)$$

$$\delta_B(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{Bn} \sin n\pi \eta = \frac{\kappa_0 a^2}{\mu D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n^2} (-A V_{Bn} - \frac{2}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} R_m^B \sin m\pi \eta \sin n\pi \eta) \sin n\pi \eta \quad (6)$$

$$\text{ここに、} A V_{An} = -\bar{C}_n(0) D \delta_{An} / a^2 - \bar{d}_n(0) D \delta_{Bn} / a^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{mn} \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \quad (7)$$

$$A V_{Bn} = \bar{d}_n(1) D \delta_{An} / a^2 + \bar{C}_n(1) D \delta_{Bn} / a^2 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \bar{G}_{mn} \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \quad (8)$$

$$\bar{C}_n(0), \bar{d}_n(0): n \text{ の関数, } \bar{G}_{mn} = m\pi^2 \{ m^2 + (2-\nu)n^2 / \mu^2 \} \bar{G}_{mn}, \kappa_1 = \epsilon D / E^A I^A, \kappa_0 = \epsilon D / E^B I^B,$$

R_m^A, R_m^B : 辺 AC, BD における連続ばりの中間反力, $E^A I^A, E^B I^B$: ばりの曲げ剛性, $\epsilon, \epsilon^A, \epsilon^B$: 中間反力の座標(図-1参照)。

したがって、式(5)(6)の両辺の係数を比較のうえ連立に解けば、 $\delta u_n, \delta v_n$ が次式のごとくえられる。

$$\frac{1}{a^2} D \delta u_n = -\frac{2\kappa A}{\mu^2} \frac{U_n}{\delta_n} \sum_{j=1}^{\infty} R_j^0 \sin n\pi \xi^0 + \frac{2\kappa B}{\mu^2} \frac{Y_n}{\delta_n} \sum_{j=1}^{\infty} R_j^0 \sin n\pi \xi^0 - \frac{1}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{nm} \sin m\pi \xi \sin n\pi \bar{\eta} \quad (9)$$

$$\frac{1}{a^2} D \delta v_n = \frac{2\kappa A}{\mu^2} \frac{Y_n}{\delta_n} \sum_{j=1}^{\infty} R_j^0 \sin n\pi \xi^0 - \frac{2\kappa B}{\mu^2} \frac{U_n}{\delta_n} \sum_{j=1}^{\infty} R_j^0 \sin n\pi \xi^0 + \frac{1}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{nm} \sin m\pi \xi \sin n\pi \bar{\eta} \quad (10)$$

ここに、 $U_n, \bar{U}_n, Y_n, \bar{Y}_n, \bar{G}_{nm}$ は n および m の関数である。

式(9)(10)を式(4)に代入すれば、本題の矩形板のたわみ w が板を弾性支持する連続はりの中間不静定反力の関数として表現され、したがって、これらの不静定量の影響面が求められればたわみ影響面も決定でき、さらにこのたわみ影響面を用いて板の諸変位、諸断面力の影響面も求められることになる。

(2) 反力影響面 弾性支持はりの中間支点反力を求めるための基本連立方程式は文献(1)と同様、支点における変位条件式をたてれば、式(5)、(6)より次式のごとくえられる。

$$\begin{bmatrix} (D_1^0 - \Gamma_1^0) & (D_1^0 - \Gamma_1^0) & \cdots & (D_1^0 - \Gamma_1^0) & \bar{\Gamma}_1^0 & \bar{\Gamma}_1^0 & \cdots & \bar{\Gamma}_1^0 \\ (D_2^0 - \Gamma_2^0) & (D_2^0 - \Gamma_2^0) & & (D_2^0 - \Gamma_2^0) & \bar{\Gamma}_2^0 & \bar{\Gamma}_2^0 & \cdots & \bar{\Gamma}_2^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (D_n^0 - \Gamma_n^0) & (D_n^0 - \Gamma_n^0) & & (D_n^0 - \Gamma_n^0) & \bar{\Gamma}_n^0 & \bar{\Gamma}_n^0 & \cdots & \bar{\Gamma}_n^0 \\ \bar{\Gamma}_1^0 & \bar{\Gamma}_1^0 & \cdots & \bar{\Gamma}_1^0 & (D_1^0 - \Gamma_1^0) & (D_1^0 - \Gamma_1^0) & \cdots & (D_1^0 - \Gamma_1^0) \\ \bar{\Gamma}_2^0 & \bar{\Gamma}_2^0 & \cdots & \bar{\Gamma}_2^0 & (D_2^0 - \Gamma_2^0) & (D_2^0 - \Gamma_2^0) & \cdots & (D_2^0 - \Gamma_2^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Gamma}_n^0 & \bar{\Gamma}_n^0 & \cdots & \bar{\Gamma}_n^0 & (D_n^0 - \Gamma_n^0) & (D_n^0 - \Gamma_n^0) & \cdots & (D_n^0 - \Gamma_n^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^0 \\ R_2^0 \\ \vdots \\ R_n^0 \end{bmatrix} = \frac{\mu^2}{2} \begin{bmatrix} D_1^0 \\ D_2^0 \\ \vdots \\ D_n^0 \end{bmatrix} - \frac{\mu^2 D}{2a^2} \begin{bmatrix} d_1^0/\kappa_A \\ d_2^0/\kappa_A \\ \vdots \\ d_n^0/\kappa_A \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(11)の左辺の諸係数は板および弾性はりの材質、断面諸寸法などにより決まる形状定数であり、右辺第1項は移動荷重 $P=1$ による荷重項、第2項は中間支点の垂直変位量である。(1)は、中間支点の流下 d ではないものとし、また、左辺の係数行列を Δ_{nn} 、 Δ_{ns} など j 行 s 列を除去し i 行 s 列を Δ_{ns}^i とすれば、式(11)の連立方程式の解 R_s^0 、 R_s^0 は次のごとく求められる。

$$R_s^0 = 1/|\Delta_{nn}| \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} |\Delta_{ns}^j| D_j^0 + \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j-i} |\Delta_{ns}^{n+j-i}| D_j^0 \right\} \quad (12)$$

$$R_s^0 = 1/|\Delta_{nn}| \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j-i} |\Delta_{ns}^{n+j-i}| D_j^0 + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} |\Delta_{ns}^j| D_j^0 \right\} \quad (13)$$

ここに、 $|\Delta|$ は Δ の行列式である。式(12)(13)は単位移動荷重 $P=1$ による荷重項 D_j^0 、 D_j^0 の関数であらわされているゆえ、これらはとりもなす反力影響面である。

(3) 変位影響面、断面力影響面 式(12)(13)を式(9)(10)に代入し(その結果を式(4)に代入すれば、たわみ影響面が次式のごとく求められる。 $w(x, \eta) = \frac{a}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n(x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\Delta_{nn}|} \left\{ \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} |\Delta_{ns}^i| D_j^0 + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+j-i} |\Delta_{ns}^{n+j-i}| D_j^0 \right\} \sin n\pi \xi \right. \\ \left. + g_n(x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\Delta_{nn}|} \left\{ \sum_{i=1}^n (-1)^{n+j-i} |\Delta_{ns}^{n+j-i}| D_j^0 + \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} |\Delta_{ns}^i| D_j^0 \right\} \sin n\pi \xi \right] \sin n\pi \eta \quad (14)$ 式(14)を x, η について適宜偏微分することにより板内の諸変位、諸断面力の影響面も求められることになる。

3. 計算例 紙面の都合上割愛し講演時に示す。

4. 結語 本法を用いれば、板の諸変位諸断面力の影響面が板を弾性支持するはり部材の中間反力の影響面として表現され、この反力影響面は式(11)の基本連立方程式から簡単に求められる点すぐれた特色をもつといえる。本題では弾性支持はりが連続はりである場合について論じたが、本法と同様の手法により、弾性支持はりから n -隅定である場合にも影響面解析が可能である。

参考文献 (1) 山崎 穂不奈子 “一対辺の連続はりに弾性支持された対辺の単純支持された矩形板の解法” 九大工学集報 40巻 4号 48昭和42年4月