

九州大学 正 員 山崎徳也

学生員 金子忠男・田実 修

1. 緒 言 矩形板が弾性ばりにて支持されるるとき板-骨組複合構造物の解法に関する研究はこれまで数多くなされて来たが、これらの既往研究はいずれも板-骨組間に対し一方向のばりで構成されている。しかるに、土木、建築などの分野で多見される實際構造物においては、板を弾性支持するはり部材は連続ばりあるいはラ-メンで構成される場合がほとんどである。したがって本研究は矩形板がその中間で多数の連続ばりあるいはラ-メンにより弾性支持される一方向連続矩形板の解法を示し、弾性骨組が平板に及ぼす力学的特性を究明せんとするものである。

2. 解 法 図-1(a)に示すとき m パネルで構成される一方向連続板において、第 i 番目のパネルに注目する。パネル①の中立面上に座標 (x, y, z) を導入し、(b)図のごとき任意垂直荷重 $p(x, y, z)$ が作用するものとすれば、パネル①の z 軸方向のたわみ w は次のごとく級数収束の形で与えられる。

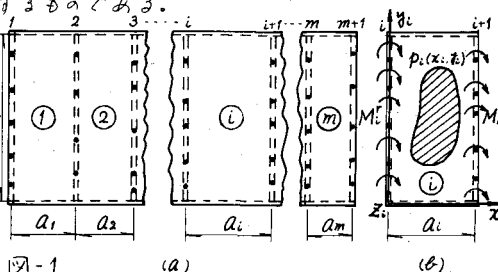


図-1

(a)

(b)

$$w_i(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \beta_n x + B_n x \sinh \beta_n x + C_n \cosh \beta_n x + D_n x \sinh \beta_n x) \sin \alpha_n y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (1)$$

ここに、 $A_n \sim D_n$: 積分定数、 $G_{mn} = \frac{1}{a_i b_i} \int_0^{a_i} \int_0^{b_i} p(x, y, z) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dy \, dx / (D_i \cosh^2 \beta_n^2)$, $\alpha_m = m\pi/a_i$, $\beta_n = n\pi/b_i$, n, m : 正整数、 $D_i = E_p h_p^3 / (12(1-\nu^2))$, E_p : パネル①のヤング率、 ν : パネル①のポアソン比、 h_p : パネル①の板厚、 $\cosh$, $\sinh$: $\cosh$ および $\sinh$ の略称。

式(1)に含まれる積分定数 $A_n \sim D_n$ はパネル①の $x=0$, $x=a_i$ の辺における境界条件により決定されるが、パネル①は $x=0$, $x=a_i$ において弾性支持ばり $i, i+1$ により弾性支持され、かつ端モーメントの作用を受けしゆえ(図-1(b))、いま、弾性支持ばりのたわみをそれぞれ $\delta_i(y)$, $\delta_{i+1}(y)$ と(端モーメントを $M_i^s(y)$, $M_{i+1}^s(y)$ とすれば、本題の境界条件として次式がえられる。

$$x=0: (w)_x=0 = \delta_i(y), \quad D_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M_i^s(y), \quad x=a_i: (w)_x=a_i = \delta_{i+1}(y), \quad D_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M_{i+1}^s(y) \quad (2)$$

式(2)における $\delta_i(y)$, $\delta_{i+1}(y)$, $M_i^s(y)$ および $M_{i+1}^s(y)$ は次式のごときフーリエ級数で展開できるとする。

$$\delta_i(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{in} \sin \beta_n y, \quad \delta_{i+1}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{i+1n} \sin \beta_n y, \quad M_i^s(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{in}^s \sin \beta_n y, \quad M_{i+1}^s(y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{i+1n}^s \sin \beta_n y \quad (3)$$

ここに、 δ_{in} , δ_{i+1n} , M_{in}^s および M_{i+1n}^s は任意定数である。

式(1)および式(3)を式(2)に代入すれば、積分定数 $A_n \sim D_n$ に関する連立方程式がえられるゆえ、これを解きその結果を式(1)に代入すれば、たわみ曲面 w の次式のごとき求められる。

$$w_i(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_i^2}{D_i} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cosh \beta_m x + B_m x \sinh \beta_m x + \frac{1}{a_i} C_m \cosh \beta_m x + \frac{1}{a_i} D_m x \sinh \beta_m x) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + \frac{a_i^2}{D_i} \sum_{m=1}^{\infty} G_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \right\} \quad (4)$$

ここに、 $A_m \sim D_m(x)$: n および x の関数、 G_{mn} : m, n の関数。

式(4)において、 M_{in}^s , M_{i+1n}^s , δ_{in} および δ_{i+1n} は依然未知定数であるが、これらはパネル①とこれを弾性支持するはり部材との間に成立する変形の連続条件より決定される。すなわち、(i)弾性ばり i のたわみ $\delta_i(y)$ ははり部材 i がパネル①の右端($x=a_i$)の板反力 $(V_{x=a_i})_{x=a_i}$ およびパネル①の左端($x=0$)の板反力 $(V_{x=0})_{x=0}$ の差 $\{(V_{x=0})_{x=0} - (V_{x=a_i})_{x=a_i}\}$ を垂直荷重として受ける時に示す弾性曲線である。(ii)弾性支持ばり i がパネル①の右端およびパネル①の左端の端モーメントの和 $(M_i^s(y) + M_{i+1}^s(y))$ をねじりモーメント荷重と

他方、垂直荷重 $g(y)$ 、ねじりモーメント $m(y)$ の作用を受けてはり部材 α にわみ $d(y)$ およびねじれ回角 $\varphi(y)$ は文献(1)によれば、フーリエ級数にて次のごとく表わされる。

$$\varphi(\eta) = \frac{\theta^2}{8T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \left(\mathcal{M}_n - \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^r M_{x_i} \sin n\pi \varepsilon_i \right) \sin \frac{n\pi}{\theta} \eta \quad (d)$$

R_i : はり部材の中間支柱(点)反力, M_{xi}, M_{yi} : 中間支柱のxおよびy方向の反力モーメント, ε_i : 中間支柱(点)の座標.

$$\begin{aligned} & \bar{g}_{n-1} M_{n-1}^r + \bar{g}_{n-1} M_{n-1}^k - \bar{g}_{n-1} M_{n-1}^r - \bar{g}_{n-1} M_{n-1}^k + \lambda_1 \bar{h}_{n-1} D_0 S_{n-1} - \{ \lambda_1 \bar{h}_{n-1} + \lambda_1 \bar{h}_{n-1} + \frac{\pi^2 \pi^2}{2} X \} D_0 S_{n-1} + \lambda_1 \bar{h}_{n-1} D_0 S_{n-1} \\ & - \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{E_0} R_0^2 \sin \pi \pi E_0^2 + \frac{2 \pi^2}{E_0^2} \frac{r_0}{E_0} M_{00}^2 \cos \pi \pi E_0^2 = \sum_{m=1}^{\infty} (G_{m,n-1}(-1)^m - G_{m,n-1}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{e}_{n,i-1} M_{i-1,n}^r + e_{n,i-1} M_{i-1,n}^l - e_{n,i} M_{i,n}^r - \bar{e}_{n,i} M_{i,n}^l + \bar{f}_{n,i-1} D_0 S_{n,i-1} - \{f_{n,i-1} + f_{n,i}\} D_0 S_{n,i} - \bar{f}_{n,i} D_0 S_{n,i+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \bar{G}_{n,i-1}^{(k)} - \bar{G}_{n,i}^{(k)} \quad (P)$$

$$(\bar{e}_{n,i} - \lambda \frac{x_i}{f_i} \frac{e_i^2}{n \pi^2}) M_{n,i}^r + (e_{n,i} - \lambda \frac{x_i}{f_i} \frac{e_i^2}{n \pi^2}) M_{n,i}^l + \lambda f_{n,i} D_0 S_{n,i} - \lambda \bar{f}_{n,i} D_0 S_{n,i} + \frac{2\epsilon_i}{n \pi^2} \sum_{j=1}^n M_{n,i}^j \min_{j \neq i} \pi \pi f_j^2 + \sum_{j=1}^n \epsilon_{n,i}^j \quad (9)$$

$$\therefore \text{に、} \lambda_i = D_i/D_0, D_0: \text{基準板剛度}, \kappa_i = e D_0/E I_i, \rho_i = G J_i/E I_i, g_{ni}, \bar{g}_{ni}, h_{ni}, \bar{h}_{ni}, e_{ni}, \bar{e}_{ni}, f_{ni}, \bar{f}_{ni}; n \text{ 箇数}$$

$G_{m,n} \subset \bar{G}_{m,n}$; 両方は δ より定まる m, n の関数

また、式(7)(8)(9)に含まれる弾性変位のりの中間不静定量 R_j , M_{j0} , M_{j1} は文獻(1)と同様、はり部材と中間支柱(点)との変形条件式をたてることにより次のとおり求められる。

* ことに、 $F^* = E \cdot I \cdot \pi^2 / 2l^2$, $K^* = G \cdot J / l$ 、左辺の諸係数は形状定数、右辺第1項は荷重値 $d_j, \theta_{j0}, \theta_{j1}$ 、支柱の

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^r \bar{D}_{k,j}^L R_j^i - \frac{2}{\sigma} \sum_{j=1}^r \bar{D}_{k,j}^L M_{j,j}^i &= \frac{\sigma}{2} \bar{D}_k^i + F^i d_k^i, \quad (k=1, \dots, r) \\ \sum_{j=1}^r \bar{D}_{k,j}^L R_j^i - \frac{2}{\sigma} \sum_{j=1}^r \bar{D}_{k,j}^L M_{j,j}^i &= \frac{\sigma}{2} \bar{D}_k^i - F^i \theta_{k,j}^i / \pi_r, \quad (k=0, \dots, r+1) \\ \frac{2}{\sigma} \sum_{j=1}^r U_{k,j}^L M_{j,j}^i &= U_k^i + K^i \theta_{k,k}^i, \quad (k=1, \dots, r) \end{aligned} \right\} \quad (1D)$$

* ことに、 $F^2 = E \cdot I \cdot \pi^2 / 26^2$ 、 $K^2 = G \cdot J \cdot \pi^2 / 26^2$ 、 F 、 E 、 I 、 G 、 J の諸係数は
形状定数、右辺第1項は荷重項、 d_j 、 θ_{j0} 、 θ_{j1} ；支座の
沈下量、および各方向の回転角、

$$D_k^i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\nabla_{x_{i,n}}^L - \nabla_{x_{i,n}}^r) \sin n\pi \varepsilon_j^i, \quad \bar{D}_k^i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\nabla_{x_{i,n}}^L - \nabla_{x_{i,n}}^r) \cos n\pi \varepsilon_j^i$$

$$U_k^i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} (M_{i,n}^L + M_{i,n}^r) \sin n\pi \varepsilon_j^i$$

$$\nabla_{x_i, n}^k - \nabla_{x_i, i, n}^k = \bar{g}_{x_i, i, n}^k M_{x_i, n}^k + \bar{g}_{x_i, n}^k M_{x_i, n}^k - \bar{g}_{x_i, n}^k M_{x_i, n}^k - \bar{g}_{x_i, n}^k M_{x_i, n}^k + 1 \cdot \bar{g}_{x_i, n}^k D_0 \delta_{x_i, n}^k - \{1 \cdot \bar{g}_{x_i, n}^k + 1 \cdot \bar{g}_{x_i, n}^k\} D_0 \delta_{x_i, n}^k + 1 \cdot \bar{g}_{x_i, n}^k \delta_{x_i, n}^k - \sum_{j=1}^n \{G_{x_i, n}^k(j) - G_{x_i, n}^k(j)\}$$
 式(7)~(10)が各弾性支持ばり毎に成立するゆえ、未知数 $M_{x_i, n}^k, M_{x_i, n}^k, \delta_{x_i, n}^k$ と $R_j, M_{x_j, n}^k, M_{x_j, n}^k$ 数と方程式の数が一致する。(したがって、これらの未知数はすべての弾性ばりで(7)~(10)を連立に解いてえらけることとなるが、式(10)は未知数の単独項と級数和の項とを共有するゆえ、解法は一種の試算算法に依るねばならない。えられた $M_{x_i, n}^k, M_{x_i, n}^k, \delta_{x_i, n}^k$ を式(4)に用いればたわみ域が決定され、このたわみ域より板内の諸変位、諸断面力も求まり、本題の一方向連続板が解けることとなる。

3. 計算例 図-2 に示すとき 2 スパン連続矩形板が周辺で単純支持され、中間で一本の 2 スパン連続ばりにて弾性支持され、かつ第 1 スパンに等分布荷重が作用している場合のたわみ図およびス方何曲げモーメントを示せば

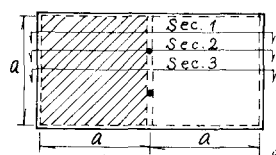
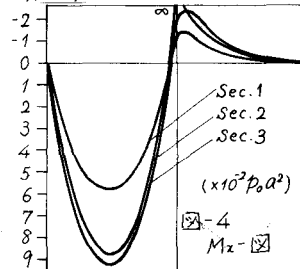
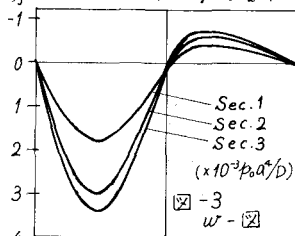


图-2



参考文献 (1) 小崎 稔 木 金 子 “一對のローメンと関り合する矩形板の解法” 九大工学集報 第41巻第2号 昭和40年3月