

九州産業大学 学生員 鈴木理史 中野正典

山本高志 増重哲男

正会員 ○ 崎山正常

1. はえがき 地下密度流の問題はいわゆる提起されているが、本報は図-1(A)および(B)に示すような流れの場を逐次加速緩和法(successive over relaxation method 以下SOR法と云う)によって解いた結果を砂模型実験によって検討したものである。なお、取扱った流れの場は水理構造物としてはその機能から施工のうえからいろいろな困難な問題もあるかと予想できるが河口堰底下の塩水浸入防止対策としてのウオーターカーテン工法への実用化を意図したものである。

2. 解析 図-1(A)および(B)に示すように座標軸とその他の諸元をとり、速度ポテンシャルを Φ 、流れの関数を Ψ 、 x および y の負方向の流速を u および v とすると同次の

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, & v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

が成立するが、図-1(A)および(B)に示した流れの場は問題が解かれた後に定まる自由境界すなわち淡水境界の曲面をもっているので式(1)を解いて境界条件を満足させることはかなり困難と考えられる。そこで

$$J = \frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{vmatrix} = u^2 + v^2 \approx 0 \dots (2)$$

なるJacobian J を導入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{1}{J} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{u}{J}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{v}{J} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{v}{J}, & \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{1}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{u}{J} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \dots (4)$$

がえられることが知られている。

本報の例題の解析は式(3)および(4)を用いて行なわれ、式(5)に淡水境界面の条件を適用すると、

図-1(A) 流れの場

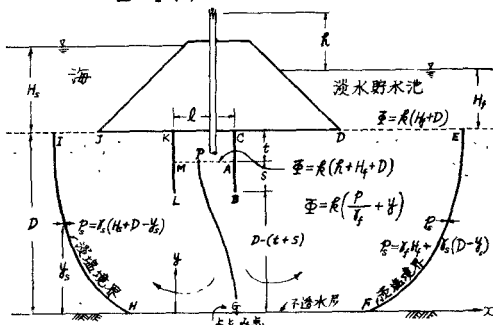
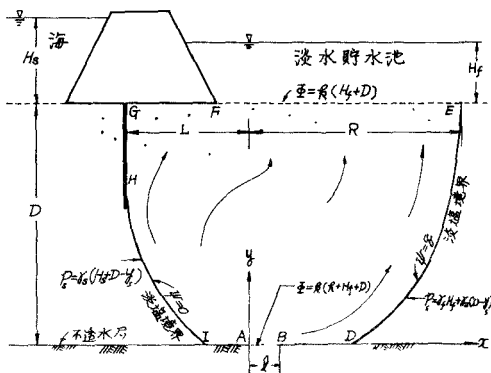


図-1(B) 流れの場



った。地盤の透水係数を k 、流れの場の任意点の圧力を P 、淡水の単位重量を γ_f として、Darcyの法則を適用できるとすれば同次のように

$$\Phi = R \left(\frac{P}{\gamma_f} + y \right) \dots (5)$$

$$\text{貯水池側} \cdots \Phi_f = R \{ H_f + (1 + \varepsilon) D \} - R \varepsilon y_s \quad \cdots \cdots (6)$$

海 則 $\dots \Phi_s = R(1 + EXH_s + D) - REY_s \dots \dots (')$

となる。ただし γ_0 を塩水の単位重量として

$$\varepsilon = \frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_f} \quad \text{--- (8)}$$

である。のちに便利なように

$$X = \frac{x}{D}, \quad Y = \frac{y}{D} \quad \text{-----}(9)$$

$$\varphi = \frac{\Phi - R(H_f + D)}{R R}, \quad \psi = \frac{\Psi}{R R} \quad \text{----- (10)}$$

なる無次元化を行なうと，式(3)および(4)は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \varphi} &= \frac{1}{J_x} \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{U}{J_x}, \quad \frac{\partial X}{\partial \psi} = -\frac{1}{J_x} \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = -\frac{V}{J_x} \\ \frac{\partial Y}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{J_x} \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{V}{J_x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \psi} = \frac{1}{J_x} \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{U}{J_x} \end{aligned} \right\} \text{-----(11)}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \psi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \psi^2} = 0 \quad \text{-----}(12)$$

となる。ただし

$$J_0 = U^2 + V^2, \quad U = \frac{(U/R)}{(R/D)}, \quad V = \frac{(V/R)}{(R/D)} \quad \text{----- (13)}$$

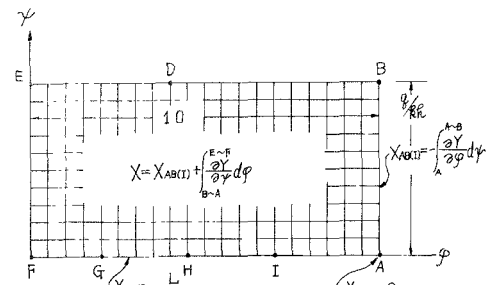
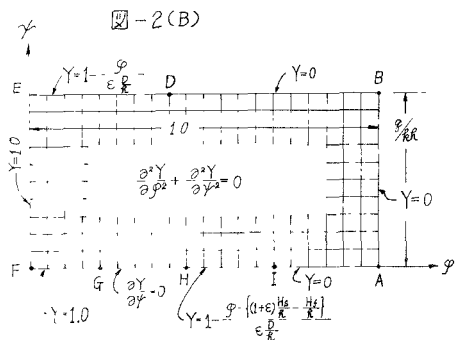
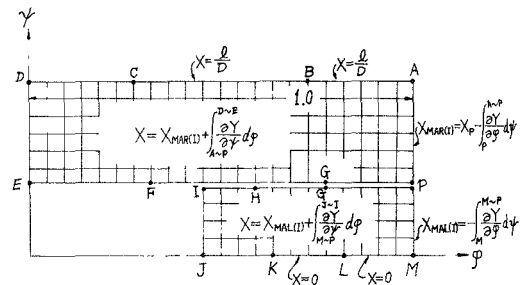
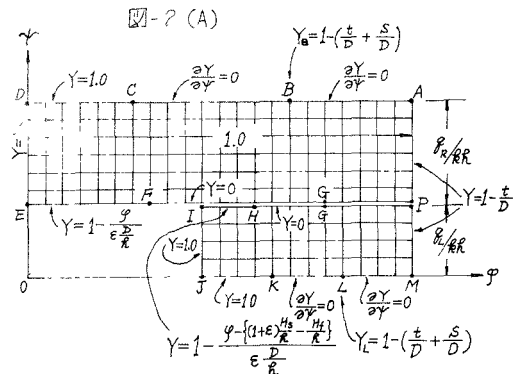
これらを用いて図-1(A)および(B)の境界条件を
 せば図-2(A)および(B)がえられる。これらの図か
 ら本例では、まず、 Y についての式(12)を解けば X につ
 いての境界条件がわかれるから、 X についての式
 (12)は解かれるわけであるが、解析の手段として
 SOR法を用いると、この方法では Y および X
 について別々に収束計算を行なわなければならない。
 い。そこで、式(11)より

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \frac{\partial Y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial X}{\partial \psi} \quad \text{--- (14)}$$

がえられ、また

$$dX = \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial \gamma} d\gamma, \quad dY = \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Y}{\partial \gamma} d\gamma. \quad (15)$$

であるからこれに式(14)を適用すれば


$$dX = \frac{\partial Y}{\partial \psi} d\psi - \frac{\partial Y}{\partial \phi} d\phi, \quad dY = -\frac{\partial X}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial X}{\partial \phi} d\phi \quad (16)$$

のえられるから、 Y をさきに解けば式(16)を積分して
 X がえられる。 X をさきに解けば同様に式(16)を積分し

$\psi = \text{const.}$ の上では

$$X = \int \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi, \quad Y = - \int \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi \quad \text{-----(17)}$$

 $\varphi = \text{const.}$ の上 z^n は

$$X = - \int \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi, \quad Y = \int \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi \quad \text{-----} (18)$$

が適用できる。本報の例題に対しては、 Y をまず SOR法によって解き、式(17)および(18)を用いて X を求めている。さて、式(12)の Y を SOR法の式で書くと図-3を参照して

$$Y_{ij}^m = (\omega/4) (Y_{i-1,j}^m + Y_{i,j-1}^m + Y_{i+1,j}^m + Y_{i,j+1}^m) - (\omega - 1) \cdot Y_{ij}^m \quad (19)$$

となる。又 ω は加速定数(over relaxation factor)で m は収束計算のくりかえしの回数である。式(19)に対して $\partial\psi/\partial Y = 0$ の境界条件は、例えば図-2(A)のA~C境界上においては

$$Y_{1,j}^m = (\omega/4) (Y_{1,j-1}^m + 2 \cdot Y_{2,j}^{m-1} + Y_{1,j+1}^{m-1}) - (\omega - 1) \cdot Y_{1,j}^{m-1} \quad \text{-----} (20)$$

となる。他の同様な境界 $K \sim M$ 上, または図-2 (B) の $H \sim G$ 上の式はこゝでは省略せよ。

3. 数値計算 数値計算は全く九州産業大学電子計算機 $\bar{O}K I T A C 5 0 9 0$ および九州大学大型電3計算機 $F A C \bar{O} M 2 3 0 - 6 0$ を用いるので図-1(A)の流れの場に対するプログラムのフローチャートを図-4に示している。図-1(B)の流れの場に対するものはこれより若干単純化されるのでここでは省略した。

4. 解析結果の模型実験による検討 数値計算の結果は図-5に例示されており、これらについて行なふ実験の様相を写真-(A)および(B)に例示している。なお、図-5(A)に示している例は翼前断面にはあまりほど遠い流れのようであるが、これは、

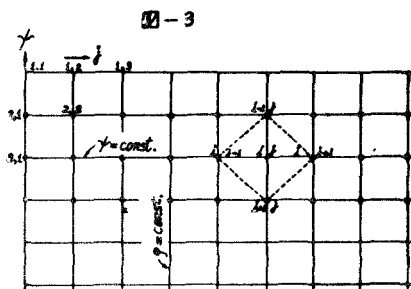
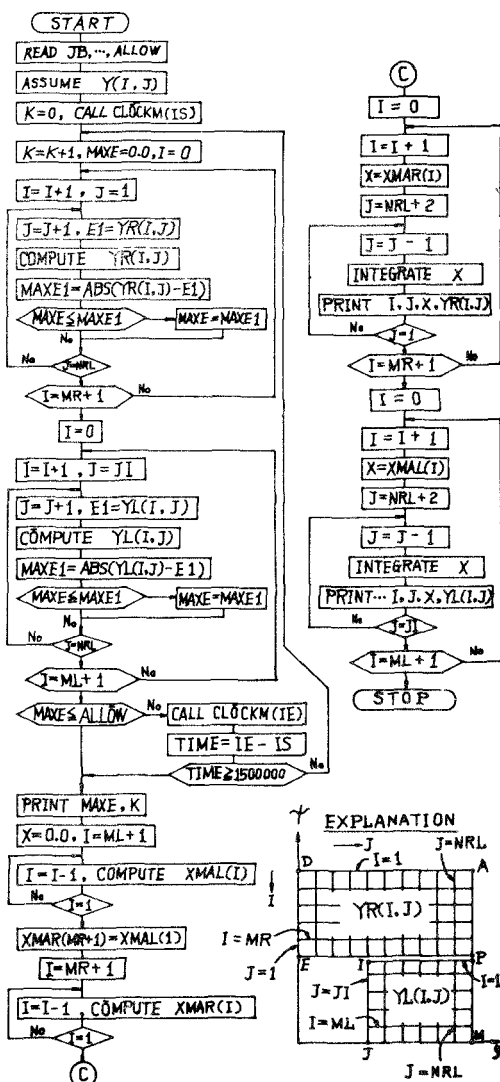


図-4 フロー・チャート (図-1(A)の流程に対するもの)



流れの場の特異点 $A, B, \dots, M$ などの図-2の $\Psi\Psi$ 平面への対応点を $\Psi\Psi$ 平面の境界上で適当にえらべば解決できる問題であり、目下、検討中である。なお、砂模型実験の結果は写真-(A)および(B)に例示しているように、浸透境界面および内部流線などが理論曲線とよく一致している。このことから本報でとり扱った流れの場のように自由境界面をもつような地下定常流に対してはSOR法による解析は電子計算機の利用によって実用化され、その結果も妥当であることから有効な手段であると考えられる。なお、境界が全て固定されている場合、境界の一部が曲面であるような場合とか、また複雑な多角形領域内の浸透流には等角写像の理論などでは、厳密にはどうしようもない問題が多いと考えるが、このような場合にもSOR法は境界の座標を $\Psi\Psi$ 平面の境界上に簡単にのせることから、解決できる問題が多いと考えられる。なお、ここで取扱ったような流れ場の諸元を実用的なものにして、それぞれの諸元が流れに対してどのような影響を及ぼすかを検討するには、かなりの計算結果を必要とするので、これについてはひきつづき検討を加えてゆく計画である。

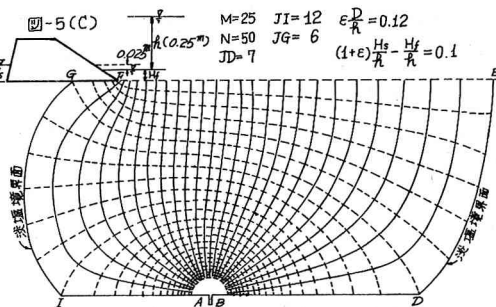
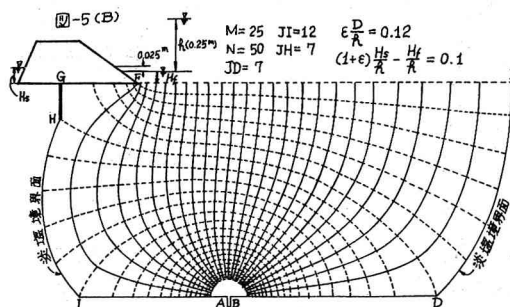
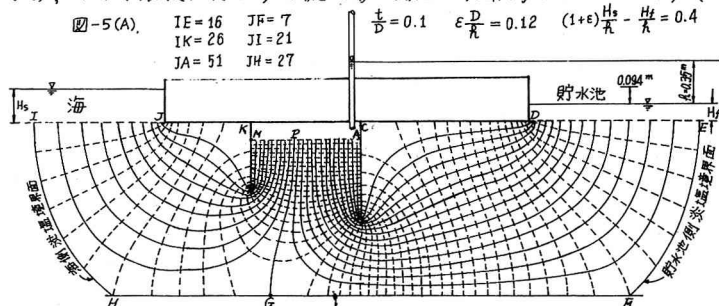


写真-(A) 図-5(A)に対する実験

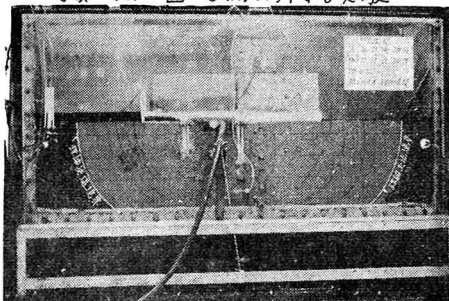
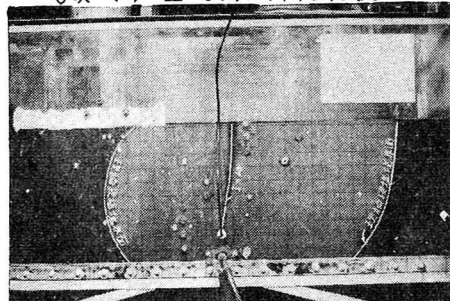


写真-(B) 図-5(C)に対する実験



- 参考文献
- 1) 矢野健太郎: "微分方程式通論", P11, 東海書房, 昭和27年
 - 2) Srisakdi Charmonnon: COASTAL PARALLEL CANALS WITH INTERMEDIATE DRAINS
Proc. of ASCE, Hy. Div., Vol 93, P.13, 1967
 - 3) Roland W. Jeppson: "SEEPAGE THROUGH DAMS IN COMPLEX POTENTIAL PLANE"
Proc. of ASCE, IR. and Dra. Div. Vol 94, P.23, 1968