

1 まえがき

非湛水の均一な半無限領域において、地下水面より下に均形暗きよがある場合の暗きよへの流れを考える。この地下水面は取水条件を変えると、時間を経るに1たべて変動するので、実際は非定常現象として取り扱われるべきだが、ここでは定常状態に達した場合だけを考える。解析手法としては

まず未知の地下水面を Zhoukovsky 関数で直線上に写像し、さらにこの領域を Schwarz-Christoffel 変換によって半無限領域に写像すると、無限領域に流入する2個あるポテンシ流となり、速度ポテンシおよび流小関数の値が決定できるから、これらの関係から地下水面の形状とそのときの暗きよ取水量を求めることとなる。

2 Zhoukovsky 変換

Darcy の法則が成り立つ範囲の2次元定常浸透流の解析に複素ポテンシルを利用すると、非同軸定常流の基礎理論と Darcy の式から、

$$\Phi = R h = R \{ (R\omega) + y \} \quad \cdots (1)$$

をうる。次にZ平面で未知の曲線がある地下水面を直線上に写像する Zhoukovsky 関数:

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2$$

を考える。まず、(1)式において

$$R(R\omega) \equiv \theta_1 = \Phi - R y \quad \cdots (2)$$

となるように θ_1 を定義する。ここに Φ はラプラスの方程式を満足し、同様にラプラスの方程式を満足する θ_2 の共役関数であるから、 θ_1 に対して次式で定義される共役関数 θ_2 をうる。

$$\theta_2 = \Psi + R x \quad \cdots (3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \theta &= \theta_1 + i\theta_2 = \Phi + i\Psi + iR(x + iy) \\ &= W + iRZ \quad \cdots (4) \end{aligned}$$

この(4)式を使って、Z平面, W平面, θ 平面の対応を求めると表1のようになる。

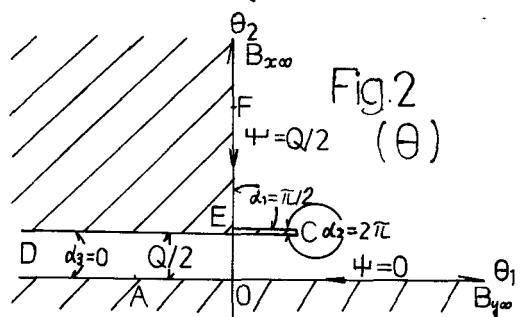
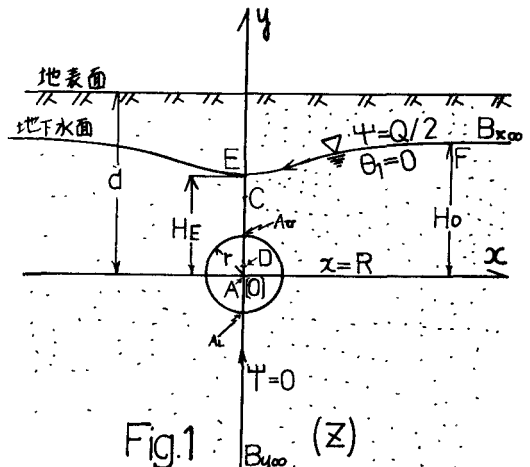


表-1

	地下水面	理論流入量 (D)	暗きよ上端 (A _上)	暗きよ下端 (A _下)	地下水面の 最低点 (E)	無限遠点 (B _{x∞})	無限遠点 (B _{y∞})
Z平面	地下水面	x=0, y=δ	x=0, y=γ	x=0, y=-γ	x=0, y=H _E	x=∞, y=H ₀	x=0, y=-∞
W平面	Φ=Ry (Ry=0)	Φ=-∞, Ψ<Q/2	Φ=R(Rω), Ψ=Q/2	Φ=R(Rω), Ψ=0	Φ=RH _{E}, Ψ=Q/2}	Φ=RH _{0}, Ψ=Q/2}	Φ=RH _{0}, Ψ=0}
θ平面	θ ₁ =0	θ ₁ =-∞, θ ₂ <Q/2	θ ₁ =R(Rω)+γ, θ ₂ =Q/2	θ ₁ =R(Rω)+γ, θ ₂ =0	θ ₁ =0, θ ₂ =Q/2	θ ₁ =0, θ ₂ =∞	θ ₁ =∞, θ ₂ =0

z 平面の浸透領域の右半平面は図2のような円平面に写像される。次にこの多角形の内部を半無限領域に写像する。

3 Schwarz-Christoffel変換

Schwarz-Christoffel の変換式を使って、図2の多角形 $DB_{\infty}B_{x\infty}ECD$ の内部(ハッチのな...部分)を図3のような、 $\tau_1 \geq 0$ の領域に写像する。ここに、Schwarz-Christoffel の変換式は、

$$\frac{d\theta}{d\tau} = t(\tau-\tau_1)^{\frac{d_1}{\pi}-1}(\tau-\tau_2)^{\frac{d_2}{\pi}-1}(\tau-\tau_3)^{\frac{d_3}{\pi}-1} \dots \quad (5)$$

(tは複素定数)

1 各点の対応

$$\left. \begin{aligned} E \text{ 点}; d_1 = \pi/2, \tau_1 = 0 \\ C \text{ 点}; d_2 = 2\pi, \tau_2 = m^2 \quad (0 \leq m^2 < 1) \\ D \text{ 点}; d_3 = 0, \tau_3 = 1 \end{aligned} \right\}$$

とすれば、(5)式は、

$$\theta = \int t \frac{\tau - m^2}{\sqrt{\tau(\tau-1)}} d\tau$$

$$= 2t\tau + t(1-m^2) \ln \frac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1} + C \quad (6)$$

(Cは複素定数)

さらに $\tau = \zeta i$ とおくと、(6)式は

$$\theta = 2t\zeta i + t(1-m^2) \ln(\zeta i - 1)/(\zeta i + 1) + C \quad (7)$$

これによって図3のz平面は図4のz平面に写像される。ここで $\zeta = \xi + i\eta$ 、 $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ 、 $t = t_1 + it_2$ 、 $C = C_1 + iC_2$ とする。

$$\ln(\zeta i - 1)/(\zeta i + 1) = \text{Re} + i\text{Im}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta^2 + (\eta+1)^2}{\zeta^2 + (\eta-1)^2} + i \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\zeta^2 + \eta^2 - 1} \quad (8)$$

とおき、(7)式を実数部分と虚数部分に分けると、

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= -2(t_1\eta + t_2\zeta) + (1-m^2)(t_1\text{Re} - t_2\text{Im}) + C_1 \\ \theta_2 &= 2(t_1\zeta - t_2\eta) + (1-m^2)(t_1\text{Im} + t_2\text{Re}) + C_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

これによって、(9)式を(7)式、(8)式に代入すると、

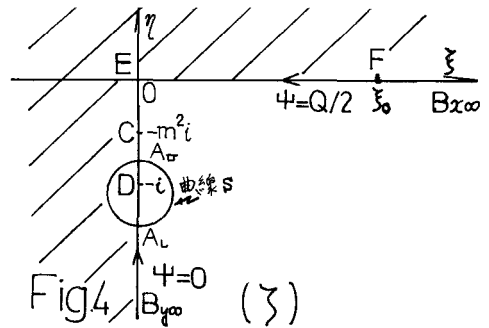
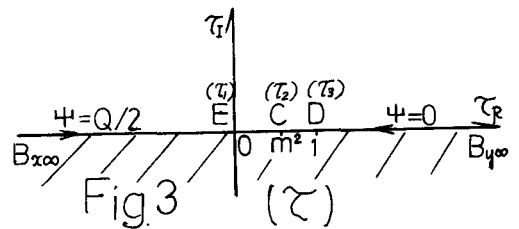
$$\Phi = R\theta - 2(t_1\eta + t_2\zeta) + (1-m^2)(t_1\text{Re} - t_2\text{Im}) + C_1 \quad (10)$$

$$\Psi = -R\theta + 2(t_1\zeta - t_2\eta) + (1-m^2)(t_1\text{Im} + t_2\text{Re}) + C_2 \quad (11)$$

ここで、(10)、(11)式の未定数 t_1 、 t_2 、 C_1 、 C_2 を

図1、2、4の対応から決定する。なお、各点の

z平面の座標およびその角の値、中の値は表-1に記してある。



(i): 流入点 D ($\zeta=0, \eta=-1$)

(8)式において、 $\text{Re}=-\infty$ とするから、(11)式の Re の係数 t_2 は 0 にならなければならない。

(ii): E 点 ($\zeta=\eta=0$)

(8)式において、 $\text{Re}=0$ とするから、(11)式より、 $C_1=0$ となる。

(iii): 暗き下り端 A_L ($\zeta=0, \eta=-\beta$ ($\beta>1$))

(8)式において、 $\text{Im}=\tan^{-1}0=0$ とすると、(11)式より $C_2=0$ となる。

(iv): 暗き上り端 A_∞ ($\zeta=0, \eta=d$ ($0<d<1$))

図4のD点のまわりの曲線Sによって、(8)式の $2\zeta/(\zeta^2+\eta^2-1)$ の変化を調べると、 A_L 点で 0 と、それから $+\infty$ に近づき、急に $-\infty$ に近づき、その後 A_∞ 点で 0 にもどる。これによって、 A_∞ 点では $\text{Im}=\tan^{-1}0=0$ である。また $\zeta=0$ 、 $t_2=0$ 、 $\Phi=Q/2$ であるから、(11)式より

$$t_1 = Q / \{ 2\pi(1-m^2) \} \text{ となる。}$$

以上、えらわれた t_1 、 t_2 、 C_1 、 C_2 の値を、(10)、(11)式に代入すると、

$$\Phi = R\eta - \frac{Q}{\pi(1-m^2)}\eta + \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{\xi^2 + (\eta+1)^2}{\xi^2 + (\eta-1)^2} \quad (12)$$

$$\Psi = -R\chi + \frac{Q}{\pi(1-m^2)}\xi + \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 - 1} \quad (13)$$

4 複素ポテンシャルの値

さて、図4のZ平面の浸透領域の右側を写像したもので、流束は $B_{\infty} \sim B_{q0}$ から流入突Dに向っている。したがって、まず、Z平面の浸透領域の左側の写像を同様に図4の左側に考え、さらにZ軸に關して鏡像の位置に同じ流入突をおくと、2の場合の複素ポテンシャルの式は、次式で与えられる。

$$W = \Phi + i\Psi = \frac{Q}{2\pi} \ln\{\zeta + i\chi\}\zeta - i\chi + \mu$$

ここに μ は複素定数で $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ である。したがって、これを実数部と虚数部に分けて、E点の条件を与えて μ を決定すると、次式をうる。($\Phi = R H_E, \Psi = \frac{Q}{2}, \xi = 0, \eta = 0$ である)

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi} \ln\{\xi^2 + (\eta-1)^2\} \left\{ \xi^2 + (\eta+1)^2 + R H_E \right\} \quad (14)$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2 + 1} \quad \dots (15)$$

こからの式は、前出の(12)、(13)式に対応しているもので、Z平面を媒介として、Z平面とW平面とを1対1に対応する。したがって、Z平面、Z平面およびW平面における各点の境界条件を与えることにより、物理量 $R, r, (P/\omega), H_E, Q, H_0$ の間係式をうる。いまこれらに対応する未知数としてZ平面のF点に対応するZ平面の値 $\xi, \eta, \alpha, \beta, m^2, E$ 点の高さ H_E 、取水量 Q に關する方程式を導く。

(1) 地下水水位回復系 ($\xi = \xi_0, \eta = 0$)

$\Phi = R H_0$ の(14)式に代入すると、

$$H_E = H_0 - \frac{Q}{2\pi R} \ln(\xi_0^2 + 1) \quad \dots (16)$$

また、

$$\chi = R, \Psi = \frac{Q}{2} \quad (15) \text{式に代入すると}$$

$$\frac{2\pi}{Q} \left\{ \frac{Q}{2} + R R - \frac{Q}{\pi(1-m^2)} \xi_0 \right\} = \tan^{-1} \frac{2\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \quad (17)$$

(2) 暗き上端 A_0 ($\xi = 0, \eta = -1$)

$\eta = -1, \Phi = R(P/\omega)$ を(14)式に代入すると

$$\alpha^2 = 1 - \exp\left\{ \frac{2\pi}{Q} R \left\{ R(P/\omega) - H_E \right\} \right\} \quad \dots (18)$$

また(12)式より

$$R\{P/\omega - r\} = Q / \{2\pi(1-m^2)\} \cdot \left[(1-m^2) \ln\{(1+\alpha)(1+\alpha)\} + 2\alpha \right] \quad \dots (19)$$

(3) 暗き下端 A_1 ($\xi = 0, \eta = -\rho$)

$\eta = -\rho, \Phi = R(P/\omega)$ を(14)式に代入すると、

$$R\{P/\omega + r\} = Q / \{2\pi(1-m^2)\} \cdot \left[(1-m^2) \ln\{(1-\rho)/(1+\rho)\} + 2\rho \right] \quad \dots (20)$$

(4) 暗き周壁は等ポテンシャルであるから、

$$(14) \text{式から } \beta^2 = 2 - \alpha^2 \quad \dots (21)$$

したがって、6個の未知数は (16)~(21) の6元連立方程式の解で与えられる。

5 数値解析

まず、(16)~(21)式を H_0 に関する次元なしの式にして

考えたと、

$$\alpha^2 = 1 - \exp\left\{ \frac{2\pi}{Q/RH_0} R \left\{ R(P/\omega)/H_0 - (H_E/H_0) \right\} \right\} \quad (22)$$

$$\beta^2 = 2 - \alpha^2 \quad (23)$$

$$m^2 = - \frac{2\alpha(Q/RH_0)}{2\pi\{R(P/\omega) - r\}/H_0 - (Q/RH_0) \ln\{(1-\alpha)/(1+\alpha)\}} \quad \dots (24)$$

$$Q/RH_0 = \frac{2\pi(1-m^2)\{R(P/\omega) + r\}/H_0}{(1-m^2) \ln\{(1-\rho)/(1+\rho)\} + 2\rho} \quad \dots (25)$$

の4式に、境界条件として、 $r/H_0, (P/\omega)/H_0$ を与えると、 H_E/H_0 に対する Q/RH_0 をうる。この結果を残りの

$$\xi_0^2 = \exp\left\{ \frac{2\pi(1-H_E/H_0)}{Q/RH_0} \right\} - 1 \quad \dots (26)$$

$$R/H_0 = \left[\tan^{-1} \left\{ \frac{2\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \right\} - \pi + \frac{2\xi_0}{(1-m^2)} \cdot \frac{(Q/RH_0)}{2\pi} \right] \quad \dots (27)$$

に代入すると、 R/H_0 も算出でき、その過程で、 ξ_0, m^2, α も β も決定されるから、6元連立方程式の解けることになる。この算定結果として、

$r/H_0 = 0.1, (P/\omega)/H_0 = 0.15, H_E/H_0 = 0.4$ の場合の地下水面形を図5に、また $r/H_0 = 0.2$ の

場合の $(P_w)/H_0$, H_E/H_0 , R/H_0 , Q/H_0k の計算図表
 を図 6 に示している。なお、本報の解析結果は、
 井戸の理論と同様に、 $x=\infty$ の突で $y=\infty$ の水位
 を持つ。1 にハッて、暗きよ中心より $x=R$ の位
 置に、 $y=H_0$ の水位を持つ水槽があるような浸透
 領域を想定しないと不都合を生じる。

なお、本研究は、昭和 44 年度文部省科学研究
 費の補助を受けた。ここに記して謝意を表する。

(参考文献)

OME Harr

"Groundwater and
 Seepage"

