

1. まえがき

地表面を湛水で被われた均一な無限大浸透領域内に 同一管径の円形集水暗きよが並列に2個あり、いずれも暗きよ内は被圧水で満たされている場合の、暗きよ取水量の算定式を 複素ポテンシャル理論より求めた。解析結果は厳密解でないので、算定誤差を検討し、被膜抵抗体を用いた電気モデルの実験結果およびこの領域における従来の近似算定式：Muskat 式の算定結果と比較している。

2. 複素ポテンシャル

図-1のように、湛水で被われた地表面と、暗きよ内を被圧水で満たされた円形暗きよの周壁とはいずれも等ポテンシャル線であり、この向のポテンシャル流は流入・流出点の向のポテンシャル流にあきかえて考えることができる。

この、無限大領域に流入・流出点1個ずつある場合の複素ポテンシャルの式は次式であらわされる。

$$W = \Phi + i\Psi = \mu \cdot \ln \frac{Z - Z_a}{Z + Z_a} + \mu' \quad \dots\dots (1)$$

これから、流入・流出点複数個ある場合の式は

$$W = \mu \cdot \sum_{k=1}^n \ln \frac{Z - Z_k}{Z + Z_k} + \mu' \quad \dots\dots (2)$$

であらわせる。ここでは 2個の流入点を考えるので、流入・流出点の位置が

$$Z_1 = a + ib, \quad Z'_1 = -a + ib, \quad Z_2 = a - ib, \quad Z'_2 = -a - ib$$

となるように座標軸を選び、式-②を実数部と虚数部にわけると、

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \ln \frac{\{(x-a)^2 + (y-b)^2\} \cdot \{(x-a)^2 + (y+b)^2\}}{\{(x+a)^2 + (y-b)^2\} \cdot \{(x+a)^2 + (y+b)^2\}} + \mu' \quad \dots\dots (3)$$

$$\Psi = \mu \left\{ \tan^{-1} \frac{2a(y-b)}{x^2 - a^2 + (y-b)^2} + \tan^{-1} \frac{2a(y+b)}{x^2 - a^2 + (y+b)^2} \right\} \quad \dots\dots (4)$$

式-③は速度ポテンシャル、式-④は流れ関数の式である。

3. 定数の決定

$$\text{図-1に示されたような湛水で被われた地表面の速度ポテンシャルは } \Phi = h\{p/w\} - x \quad \dots\dots (5)$$

$$\text{より } \Phi = hH_0 \quad \text{一方、式-③より求めると } \Phi = \mu' \quad \text{したがって } \mu' = hH_0 \quad \dots\dots (6)$$

また、式-③より地表面における湛水の流入速度を求めると、

$$u = -(\partial\Phi/\partial x)_{x=0} = 2a\mu \left\{ 1/\{a^2 + (y-b)^2\} + 1/\{a^2 + (y+b)^2\} \right\}$$

ここで、二つ並べられた集水暗きよが同じものであると、暗きよへ向う流れは、両暗きよの中央(x

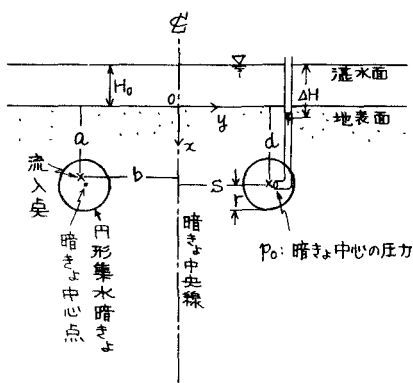


図-1 浸透領域

軸)を対称軸とした左右対称の流れになる。したがって、 $y \leq 0$ の地表面より流入した湛水はすべて x 軸より右側の暗渠に流れ込み、また $y \leq 0$ の地表面からはすべて左側の暗渠へ流れ込む。いま、 Q とはいわゆる右側の暗渠へ流れ込む流量を Q とし、これを、地表面について求めると

$$Q = - \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0} dy = 2a\mu \left\{ \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{y-b}{a} + \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{y+b}{a} \right\}_0^{\infty} = 2\pi\mu$$

したがって $\mu = Q/2\pi$ (7) をうる。

4. 取水量算定式

2つの暗渠の中心間隔(2.S)、地表面から暗渠中心までの深さ(a)、暗渠径(r)および暗渠中心の圧力(P_0)が与えられているものとして、円形暗渠による取水量を求める。暗渠内は被圧水で満たされているから、暗渠内のすべての点は等ポテンシャルで、暗渠周壁の上端($x=d-r, y=s$)の速度ポテンシャルは、暗渠中心の速度ポテンシャル $\Phi = f_0\{ (p_0/w) - d \}$ (式-5より)に等しい。

この条件と式-6、7を式-3に代入すると、1本当りの取水量 Q の算定式が次式のようにあらわされる。

$$Q = \frac{4\pi f_0 \{ H_0 + d - (p_0/w) \}}{\ln \left\{ \frac{(a+d-r)^2 + (s-b)^2}{(a-d+r)^2 + (s-b)^2} \right\} \left\{ \frac{(a+d-r)^2 + (s+b)^2}{(a-d+r)^2 + (s+b)^2} \right\}} \quad \text{..... (8)}$$

5. 流入点の位置(a, b)

まず、式-3で $\Phi = C$ において、等ポテンシャル線の方程式を求めてみると、

$$(x+a)^4 e^c - (x-a)^4 + (y^2 - b^2)^2 (e^c - 1) + \{ (y-b)^2 + (y+b)^2 \} \{ (x+a)^2 e^c - (x-a)^2 \} = 0$$

となって、等ポテンシャル線は円でなくなる(半無限領域に流入点がある場合は円となる)。こ

こで、流入点の位置a, bを求めるための条件として、暗渠周壁の上・下端および左・右端が等ポテンシャル、すなわち

$$\Phi_{(x=d-r, y=s)} = \Phi_{(x=d+r, y=s)} \quad \text{..... (9)}$$

$$\Phi_{(x=d, y=s-r)} = \Phi_{(x=d, y=s+r)} \quad \text{..... (10)}$$

の式を用い

$$a = \sqrt{\frac{(d+r-a)^2 + (s-b)^2}{(d+r+a)^2 + (s-b)^2} \left\{ \frac{(d-r+a)^2 + (s+b)^2}{(d-r-a)^2 + (s+b)^2} \right\} \{ (d-r+a)^2 + (s-b)^2 \} - (s-b)^2} + (d-r) \quad \text{..... (11)}$$

$$b = \sqrt{\frac{(d-a)^2 + (s+r-b)^2}{(d+a)^2 + (s+r-b)^2} \left\{ \frac{(d-a)^2 + (s-r+b)^2}{(d+a)^2 + (s-r+b)^2} \right\} \{ (d+a)^2 + (s-r-b)^2 \} - (d-a)^2} + (s-r) \quad \text{..... (12)}$$

この式-11、12を同時に満足するa, bの値を試算演算により求めた。この場合、式-11で求めた近似値aを式-12に代入して近似値bを求め、さらにこのbを式-11に代入して.....という計算をほぼ10回、近似値の選定をうまくしないとa, bの値が発散してしまう。そこで、逐次、近似値を平均しながら計算した方がよい(図-2)。

図-3は図-2の計算過程におけるa, bの値

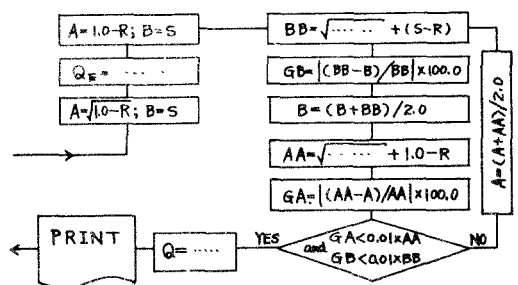


図-2. a, b 計算のフローチャート

とその最終値との差の絶対値を示したものであるが、繰返し回数の変化傾向としては、 Q に関しては S/d の値にかかわらず r/d に比例して増加し、 b に関しては、おおむね $1/S$ に逆比例して増加しているようにみうけられる。また繰返し回数そのものも比較的少なくて済むようである。

この a 、 b を使った式-8 の算定結果を図-4 に示す。次に $b-S$ は $d-a$ に比較して小さいので 近似的に $b=S$ とおくと 式-8 (1) は

$$q_E = \frac{2\pi k \{H_0 + d - (p_0/w)\}}{\ln \frac{a+d-r}{a-d+r} + \frac{1}{2} \ln \frac{(d-r+a)^2 + 4S^2}{(d-r-a)^2 + 4S^2}} \quad (13)$$

$$a \doteq \sqrt{d^2 - r^2}$$

さらに、 $a \doteq d$ とおき、式-13 の分母第2項目を $\{(2d-r)^2 + 4S^2\} / (4S^2 + r^2) \doteq 1 + 4d^2 / (4S^2)$

とおくと

$$q_M = \frac{2\pi k \{H_0 + d - (p_0/w)\}}{\ln \frac{2d}{r} + \frac{1}{2} \ln (1 + \frac{d^2}{S^2})} \quad (14)$$

式-14 は Muskat によって導かれた図-1 の領域での取水算定式にはかならない。これら式-13、14 の算定結果と式-8 の算定結果との誤差を図-5 に示している。

6. 取水算定式の検討

前述のように、等ポテンシャル線群は円でないから、式-8 において円形暗渠とみなした $x=d-r$ 、 $y=S$ を通り $\Phi = k \{ (p_0/w) - d \}$ の値をもつ等ポテンシャル線も円ではないが、流入点の位置を求める際、暗渠の周壁の上下、左右端に相当する ($x=d \pm r$ 、 $y=S$) と ($x=d$ 、 $y=S \pm H$) の4点が等ポテンシャルであるように設定したから、求められた等ポテンシャル線の形はほぼ円に近いものと推定される。いま $S/d=1.5$ 、 $r/d=0.2$ の場合について式-3、4 より求めた流線網を図-6 に示している。
($H_0 - \Phi) / kH = 1.0$ の等ポテンシャル線を暗渠の周壁と考えるわけで、この場合は推定通りきれいな円になっている。しかしこの図からもわかるように、対称軸の x 軸に近い部分の等ポテンシャル線は必ずむ傾向にあるので、 S/d が小さいと ($H_0 - \Phi) / kH = 1$ の等ポテンシャル線は x 軸に近くなり、円でなくなることが考えられる。逆に $S/d = \infty$ の場合は1個の集水暗渠が無限大領域にあることと同じ

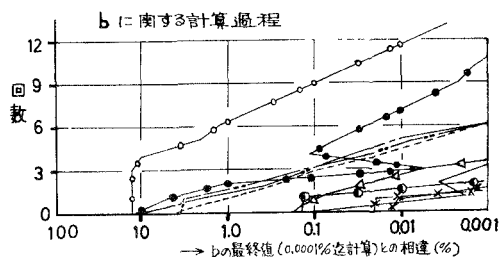
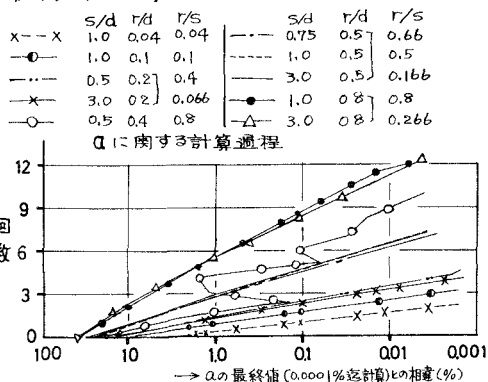


図-3. a, b の計算

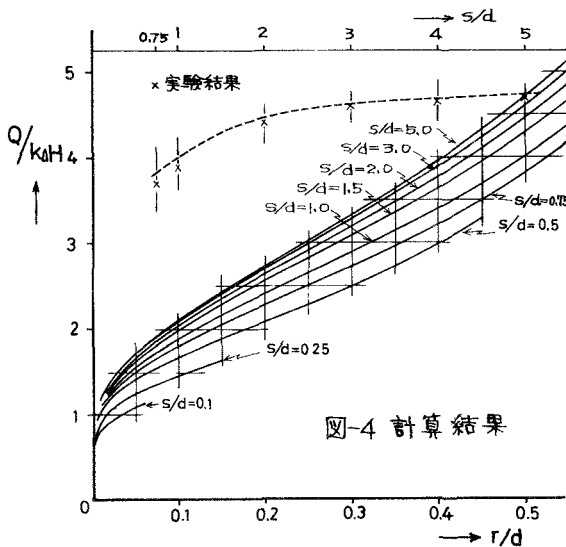


図-4 計算結果

で、この場合の等ポテンシャル線群は円である。以上のことから、 S/d がかなり大きい場合は暗きょ径の大小にかかわらず厳密解とみなしうるほどに良い算定結果をうるが、 S/d が小さくて暗きょ径が大きい場合の算定結果は大きな誤差を含むものと思われる。

これを被膜抵抗体を用いた電気モデルの実験で調べてみる。

$r/d=0.5$, $S/d=0.75 \sim 5.0$ とした場合の実験結果を図-4にX印で、式-8より求めた算定結果を点線で示している。これから式-8は S/d が小さい場合にやや大きめの値を与え、 S/d が大きい場合、よく一致するという結果をえた。次に式-13、14の近似算定式について図-5に示されているように、式-8と比較すると、 $b=S$ とした式-13は大きめの値を、 $a=d$, $b=S$ としたMuskat式は小さめの値を与え、しがも式-13のほうが式-8に近い値を与えるようである。これを上の実験結果と比較してみると右表のようになり、やはりこの場合も、やや式-13のほうが実験値に近い値を与えて

S/d	0.75	1.0	2.0	3.0	5.0
式-(8)	3.43	2.76	0.99	0.89	0.92
式-(13)	6.78	7.93	4.04	2.49	1.55
式-(14)	-10.50	-7.08	-4.99	-4.53	-4.26

表・実験結果との相違 (%)

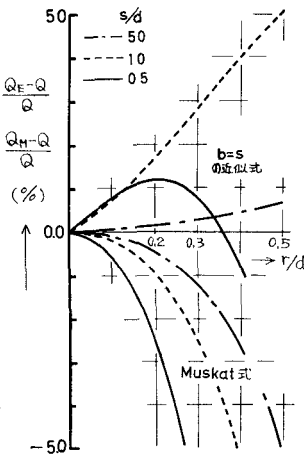


図-5 解析解と近似解との相違

7. 取水効率

式-8の算定結果 (Q) を半無限領域に集水暗渠1個ある場合の取水量 (Q) と比較してみよう。いま $r/d=0.01 \sim 0.5$, $S/d=0.1 \sim 0.5$ における両者の比を求めてみると図-7のようになる。これから r/d が小さいほど1個の場合の算定式で近似計算できることがわかる。またこの図は、半無限領域に1個あった集水暗渠をさらに一個増設した場合の

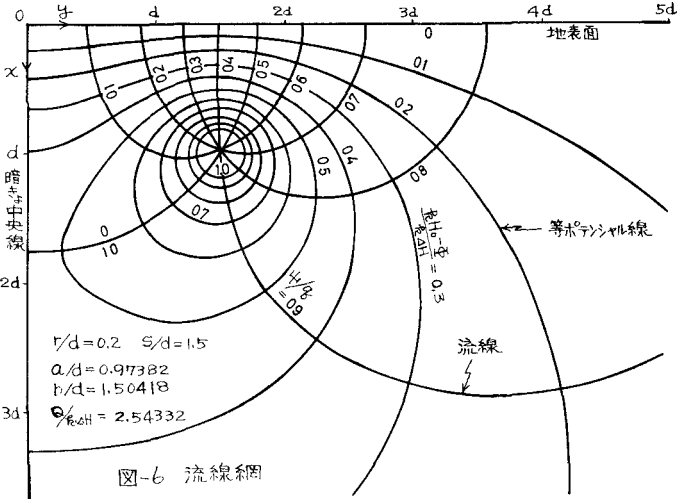


図-6 流线網

暗渠一本当りの取水効率を表わしているものと見ることもできる。いま、二つの暗渠の間隔ができるだけ狭く、かつ取水量が多い場合を探すと、 $S/d < 10$ とは取水量が極端に減少するし、 $S/d > 20$ とは間隔を広くしてもあまり取水量が増加しないから、おおよそ $10 \leq S/d \leq 20$ の間隔 (実際の間隔は $2 \cdot S/d$) で設置すればよいであろう。なお本研究は昭和44年度文部省科学研究費の補助をうけた。ここに記して謝意を表する。

* M. Muskat, "The flow of homogeneous fluid through porous media" p.522, McGraw-Hill B.C. 1946.

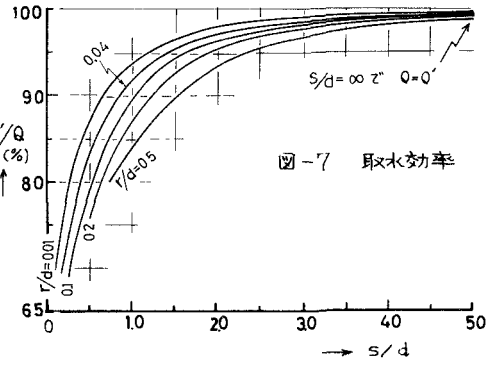


図-7 取水効率