

1. まえがき

本報は、地表面を湛水で被われた、水平方向に長い帯状の均質な浸透領域に、等条件の円形暗きよが並列して2個ある場合の暗きよ取水量の算定式を求め、さらに多くの暗きよがある場合の、総取水量の算定方法についてのべたものである。実際の浸透領域の大部分は、暗きよの下方に不透水層とみられる地盤が存在するので、半無限浸透領域の取水量算定式よりも実用的であると考えられる。

2. 領域の写像

水平方向に長い帯状の領域に、等条件の円形暗きよが2個ある場合の1個の暗きよに対する領域境界線は、2個の暗きよの中央線と不透水層の線（これは一つの流線）と地表面（等ポテンシャル線）である。したがって両暗きよの中央線を実軸、地表面を虚軸として、この帯状領域を半無限領域に写像すると、半無限領域に円形暗きよが2個あることになる。ここに半無限領域内の円形暗きよと地表面との間のポテンシャル流れは、無限大領域に流入・流出点の2個ずつある場合のポテンシャル流と同じものであり、その複素ポテンシャルの式は次式で与えられている。

$$W = \Phi + i\psi = \mu \sum_{n=1}^2 \ln \frac{Z - Z_n}{Z - \bar{Z}_n} + \mu' \quad (1)$$

したがって、帯状領域と半無限領域との間の写像関数を求めれば、式(1)を使って帯状領域における地表面と円形暗きよとの間の流れの複素ポテンシャルの式が求められる。すなわち、図-2のように、与えられた帯状領域(ACDE)の2倍の厚さの帯状領域(ACFG)を考え、x軸と不透水層との交点Bを無限大領域のB'点へ写像するものとすれば、この写像関数は、Schwarz-christoffelの定理より

$$Z = M \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 - Z^2}} = M \cdot \sin^{-1} \frac{Z}{\alpha} \quad \text{すなわち } M \text{ は実係数}$$

$$\therefore Z = \alpha \cdot \sin(Z/M) \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入すると求める複素

ポテンシャルの式は

$$W = \mu \sum_{n=1}^2 \ln \frac{\sin(Z/M) - \sin(Z_n/M)}{\sin(Z/M) - \sin(\bar{Z}_n/M)} + \mu' \quad (3)$$

すなわち、式(3)においては式(2)の定数 α が分母・分子で消去できるから、ポテンシャルの値を求めることに關しては、 α の値を求める必要はなく、逆にいえば、 α の値は自由に選んでよいことになる。

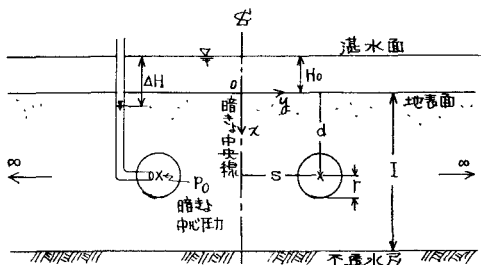


図-1 帯状浸透領域 (Z-平面)

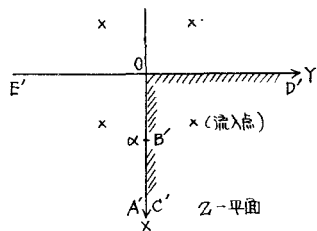
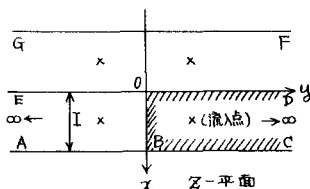


図-2 領域の写像

一方, M の値は, Z -平面の B 点 ($Z=\alpha$) が z -平面の B 点 ($z=1$) と対応するために, 式(2)より

$$1/M = \pi/2l \quad \text{--- (4)} \quad \text{となければならない。}$$

3. Φ , ψ の式

速度ポテンシャル Φ と流れ関数 ψ はそれぞれ複素ポテンシャルの式の実数部, 虚数部で与えられる。

いま, 流入・流出点の座標を $(\pm a, \pm bi)$ とし,

$$\sin \frac{Z}{M} \equiv \sin \frac{x}{M} \cdot \cosh \frac{y}{M} + i \cos \frac{x}{M} \cdot \sinh \frac{y}{M} = \operatorname{Re} \left(\sin \frac{Z}{M} \right) + i \operatorname{Im} \left(\sin \frac{Z}{M} \right) \quad \text{--- (5)}$$

ここに Re は Real Part, Im は Imaginary Part である。

を使って式(3)の実数部と虚数部にわけると,

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \left\{ \ln \frac{[\operatorname{Re}(\sin \frac{Z}{M}) - \operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M})]^2 + [\operatorname{Im}(\sin \frac{Z}{M}) - \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]^2}{[\operatorname{Re}(\sin \frac{Z}{M}) + \operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M})]^2 + [\operatorname{Im}(\sin \frac{Z}{M}) - \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]^2} \right. \\ \left. + \ln \frac{[\operatorname{Re}(\sin \frac{Z}{M}) - \operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M})]^2 + [\operatorname{Im}(\sin \frac{Z}{M}) + \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]^2}{[\operatorname{Re}(\sin \frac{Z}{M}) + \operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M})]^2 + [\operatorname{Im}(\sin \frac{Z}{M}) + \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]^2} \right\} + \mu' \quad \text{--- (6)}$$

$$\psi = \mu \left\{ \tan^{-1} \frac{2 \operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M}) [\operatorname{Im}(\sin \frac{Z}{M}) - \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]}{[\operatorname{Re}(\sin \frac{Z}{M})]^2 - [\operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M})]^2 + [\operatorname{Im}(\sin \frac{Z}{M}) - \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]^2} \right. \\ \left. + \tan^{-1} \frac{2 \operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M}) [\operatorname{Im}(\sin \frac{Z}{M}) + \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]}{[\operatorname{Re}(\sin \frac{Z}{M})]^2 - [\operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M})]^2 + [\operatorname{Im}(\sin \frac{Z}{M}) + \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]^2} \right\} \quad \text{--- (7)}$$

ここに $Za = a + ib$, $Za' = -a + bi$ で, 両者の間には

$$\operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M}) = -\operatorname{Re}(\sin \frac{Za'}{M}) \quad \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M}) = \operatorname{Im}(\sin \frac{Za'}{M})$$

が成り立つ。

次に係数 μ および定数 μ' の値を求める。いま $y \geq 0$ だけの領域で y 軸を通過する流量を q とおくと,

$$q = - \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0} dy = 2\mu \cdot \operatorname{Re} \left(\sin \frac{Za}{M} \right) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1/M \cdot \cosh \frac{y}{M} \cdot dy}{[\operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M})]^2 + [\sinh \frac{y}{M} - \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]^2} \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{1/M \cdot \cosh \frac{y}{M} \cdot dy}{[\operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M})]^2 + [\sinh \frac{y}{M} + \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})]^2} \right\} \quad \text{--- (8)}$$

そこで $\sinh \frac{y}{M} = t$ とおくと $1/M \cdot \cosh \frac{y}{M} dy = dt$ 。 $t=0$ かつ

$$q = 2\mu C \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dt}{C^2 + (t-C)^2} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{C^2 + (t+C)^2} \right\}, \quad \text{ここに } C = \operatorname{Re}(\sin \frac{Za}{M}), C' = \operatorname{Im}(\sin \frac{Za}{M})$$

$$t=0 \text{ かつ } q = 2\pi\mu. \quad \therefore \mu = q/2\pi \quad \text{--- (9)}$$

$$\text{また, } x=0 \text{ のとき式(6)は } \Phi = \mu' \quad \text{--- 一方, } \Phi = \operatorname{Re}\{(p/\omega) - x\} \quad \text{--- (10)}$$

より地表面 ($x=0$) の速度ポテンシャルは地表面上の潜水深を h_0 とすると $\Phi = \operatorname{Re} h_0 \quad \therefore \mu' = \operatorname{Re} h_0$ --- (11)

4. 流入点の位置 a, b

次に a, b の値を求めるために, 条件式として

$$\Phi_{(x=d-r, y=s)} = \Phi_{(x=d+r, y=s)} \quad \text{--- (12)}, \quad \Phi_{(x=d, y=s-r)} = \Phi_{(x=d, y=s+r)} \quad \text{--- (13)}$$

の2式を与える。計算手法は半無限領域に2個の暗きよがある場合と同じである。

この計算により式(12), (13) を満足する a, b の値は求まるが, これらは一般に

$$\Phi_{(x=d-r, y=s)} = \Phi_{(x=d, y=s-r)} \quad \text{を満足しない。すなわち いくつかの計算結果はよまう。}$$

暗きよ周壁上下端に対応する2点 ($x=d \pm r, y=s$) では $(k_h o - \Phi)/(k_a H) = 1.0$ であるのに対し、周壁左右端に相当する2点 ($x=d, y=s \pm r$) の $(k_h o - \Phi)/(k_a H)$ は1.0とはならない。いま、 $x=d$ で $(k_h o - \Phi)/(k_a H) = 1.0$ となる y の位置の円との相違を求めてみると、表-1のようになる。すなわち、円形暗きよ周壁に相当する $(k_h o - \Phi)/(k_a H) = 1.0$ の等ポテンシャル線は円ではなく、いくぶん縦細い形であることがわかる。

5. 流線網

速度ポテンシャルおよび流れ関数がどのように分布しているのを知るために、 $s/I = 1.0, d/I = 0.5, r/I = 0.1$ の流線網を求めて図-3に示している。

$r/I \backslash s/I$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
0.5	99.2*, 99.3*	96.9, 97.6	93.3, 95.3	88.4, 92.8	82.5, 90.2	75.7, 87.8
1.0	99.4, 99.4	97.7, 97.8	95.1, 95.4	91.6, 92.3	87.5, 88.8	83.0, 85.0
1.5	99.4, 99.4	97.9, 97.9	95.5, 95.5	92.4, 92.5	88.7, 89.0	

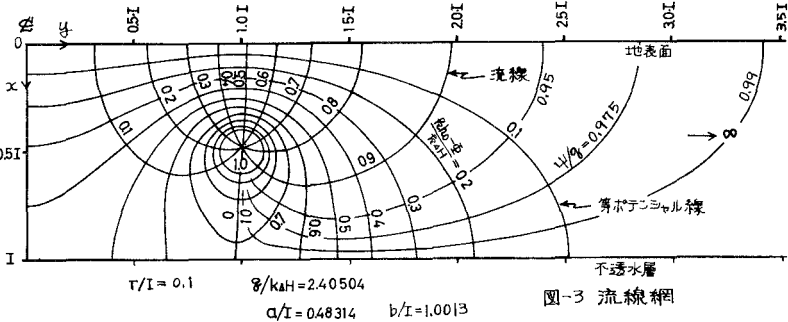
*: 暗きよ中心より中央線側
 **: 暗きよ中心より中央線の反対側

表-1. $d/I = 0.5$ の時の $\{s - y_c (k_h o - \Phi)/(k_a H = 1.0)\} / r$ の百分率

なお図中の等ポテンシャル線の数値は $(k_h o - \Phi)/(k_a H)$ を、流線の数値は Ψ/q をあらわす。この場合の等ポテンシャル線および流線の形状は、暗きよより中央線側では長方形領域に暗きよが1個ある場合と、また暗きよより中央線の反対側では水平方向に無限大の領域に暗きよが1個ある場合と非常によく似ている。次に地表面において $\Psi/q \approx 1.0$ となる流線の位置を求めてみると、 $y = 3.43 I$ で $\Psi/q = 0.99$ 、 $y = 3.875 I$ で 0.995 、 $y = 5.0 I$ で 0.9999 となっている。したがって、 $y = 4.0 I \sim 5.0 I$ の箇所に不透水性板を置いても、先に求めた y 軸を通過する流量 q はほとんど変化しないものと考えられる。なおこの位置は暗きよの間隔 ($2s$) によって多少移動することは明らかであろう。このことから、電気モデルなどによって、実験的に流量を求める場合に、縦方向の長さに対して横方向の長さがある程度大きければ、実験結果を横方向に無限の場合の解とみなすことができる。

6. 取水量算定式

暗きよ中心の圧力 p_c の被圧水で円形暗きよ内が満たされている場合暗きよ内は $\Phi = k \{ (p_c/w) - d \}$ の等ポテンシャル



算定式である。ただし、先にものべたように、円形暗きよの周壁に相当する $(R_h - \Phi)/(R \cdot \Delta H) = 1.0$ の等ポテンシャル線が円ではないから式(14)は厳密解ではなく、この等ポテンシャル線を円とみなした近似解である。

7. 取水量算定結果

$d/I = 0.5$ としたときの算定結果を図-4に示す。この図から明らかになるように、 r/I を一定としておき、暗きよ間隔を広げると、いくぶん取水量は増加するけれども、この傾向は暗きよ間隔が小さい場合に大きく、 $S/I > 1.5$ ではほとんど無視できるほどに小さくなる。次に表-1から $(R_h - \Phi)/(R \cdot \Delta H) = 1.0$ の等ポテンシャル線は、 r/I が小さいほど円に近づくので、算定結果も厳密解に近づくと考えられる。これに対し、 r/I が大きいと写像の影響が大きくあらわれて、 S/I を小さくしても $(R_h - \Phi)/(R \cdot \Delta H) = 1.0$ の等ポテンシャル線は円にはならない。この点が、半無限領域に暗きよが2個ある場合と異なる。

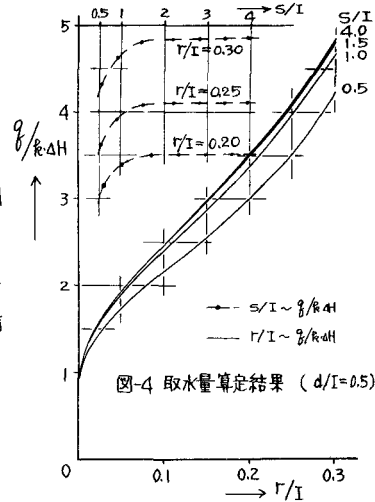


図-4 取水量算定結果 ($d/I = 0.5$)

8. 多並列の場合への適用

図-5のように有限個の暗きよが等間隔に並列してあるとき、それぞれの暗きよの中央線(点線)が暗きよの浸透領域を区分する流れ

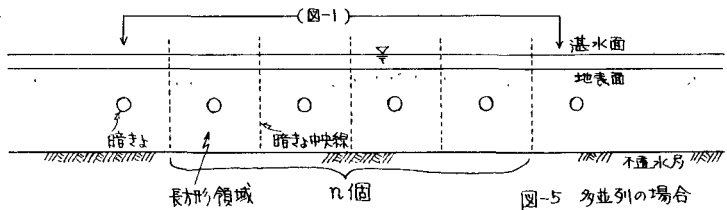


図-5 多並列の場合

と完全に一致するかどうかは疑問が残るが、ここでは近似的に一致するものとする。この流れに挟まれた領域を単位として、それぞれの暗きよは互いに全く独立のものとして考えることができる。したがって、個々の暗きよの取水量を単独に求めることができる。とくに両端2個の暗きよによる取水は、これらの暗きよより、それぞれ1個内側の暗きよとの中央線が直接に接触した状態、すなわち、この2つの中央線に挟まれた内側の浸透領域がないものとした場合を考えれば本報で解析した図-1の領域と全く同じものと考えられるから、両端2個による取水量はそれぞれ式(14)より算出される。また、それより内側にある n 個の暗きよによる取水量は、長方形浸透領域の中心軸上に円形暗きよが1個ある場合について求めた算定式*

$$q_R = \frac{2\pi k \{h_0 + d - (P_c/w)\}}{\ln \frac{\sqrt{\sin \{K(m) \cdot (d+r)/I, m\}} + \sqrt{\sin \{K(m) \cdot (d-r)/I, m\}}}{\sqrt{\sin \{K(m) \cdot (d+r)/I, m\}} - \sqrt{\sin \{K(m) \cdot (d-r)/I, m\}}}} \quad (15)$$

ここに $K(m)$ は第一種完全楕円積分、 $\sin(O, m)$ は Jacobi の楕円関数、 m^2 は母数を使えば算出できる。したがって総取水量は $Q = 2 \cdot q_R + n \cdot q_R$ 与えられる。この式(16)を用いた計算結果は講演時にのべる。

なお本研究は昭和44年度文部省科学研究費の補助をうけた。ここに記して謝意を表する。

*上田、杉尾：集水暗きよの取水量の解析，昭和42年度西部支部研究発表会論文集，P.155。