

九州大学工学部 正会員 栗谷陽一

九州大学工学部 正会員 古本勝弘

九州大学大学院 学生員 O島田 晋

九州大学工学部 中馬逸男

§1. まえかき 河川や管路等の剪断乱流場においても断面内の初期濃度分布の影響がなくなるいわゆる拡散の卓越した状態において、現象を1次元の拡散方程式によって取り扱えることが、Taylor¹⁾ Elder²⁾, Fischer³⁾ 等によって指摘されている。この報告では流速と流向を周期的に変化する流れ(例えば感潮河川河口部での流れ等)において、拡散方程式の係数(流れ方向のみかけの拡散係数)を算定しようとするものである。今回は今迄の理論を検討し、定常流及び周期的流れにおけるみかけの拡散係数の推定法を提案している。そして河川でいえば川幅方向の拡散に注目して、三角形断面の管路において実験を行ない、みかけの拡散係数を測定した。

§2. 乱流拡散における Time Scales とみかけの拡散係数 断面内の混合に関する Time Scale は定常状態の断面内の濃度分布を特徴づけるパラメーターとして、拡散過程に参与するものについての次元解析により、次のようになる。

$$T_c = \frac{l^2}{E} \quad (1)$$

ここに、 T_c は Cross-sectional Time Scale と呼ばれ、 l は断面内混合についての代表的な長さであり、円管については半径、無限幅二次元開水路では水深、一般の開水路では、流速の最大点から遠い側の岸までの距離をとればよい。ここで注意しておくべき点は、円管や無限幅二次元開水路では流れの代表長さ(半径、水深)が質量輸送の代表長さ l に等しく、一般の流れでは流れの代表長さ(水深)であって、質量輸送の代表長さは川幅に比すべきものであることも Fischer³⁾ が強調していることである。 E は断面についての代表的な混合係数であり、例えば乱流拡散係数の断面での平均、拡散機構に寄与する代表的な分子動粘性係数(分子拡散係数)等をとればよい。

一樣乱流場における Lagrange 的な解析により、Lagrange 相関係数を $R_L(\xi)$ とし、分散係数 $K(x)$ は次のように表わされる。

$$K(x) = \overline{u^2} \int_0^x R_L(\xi) d\xi \quad (2) \quad R_L(\xi) = \frac{\overline{u'(x)u'(x+\xi)}}{\overline{u'^2}} \quad (3)$$

$$\text{ここで} \quad K(\infty) = \overline{u^2} T_L \quad (4) \quad T_L = \int_0^\infty R_L(\xi) d\xi \quad (5)$$

とすれば、 T_L は Lagrangian Integral Time Scale である。Taylor¹⁾ はこのような Lagrange 的な考えか、長い均一な円管内の流れにおいても適用できることを述べており、Fischer³⁾ も一般の開水路に対して同様に考えることができると指摘している。そして Fischer は、 $K(\infty)$ が剪断乱流場における流れ方向のみかけの拡散係数 K_L に等しいと考えれば、一般の河川或いは水路における流れでは、 $\overline{u'^2}$ のかわりに、断面内の平均からの流速変動の分散 $\langle \hat{u}^2 \rangle$ を用いることができであろうと考えた。つまり、

$$K(\infty) = K_L \quad (6) \quad \overline{u'^2} = \langle \hat{u}^2 \rangle \quad (7)$$

このように考えると

$$K_L = \langle \bar{u}^2 \rangle T_L \quad (8)$$

となり、 K_L を直接求められなくても、断面内の流速分布と T_L が分れば、 K_L も推定することができ、 T_L については、 T_L と T_C の比を何らかの形で求めておけば、 T_C から T_L もまた推定される。逆に K_L を解析的に或いは実験より求められれば、断面内の流速分布とから T_L が推定され、 T_L と T_C の比が求められる。Fischerは T_L と T_C の比として無限幅二次元開水路における Elderの計算を用いて求め、一般の開水路における K_L の算定式を提案している。定常流について、流れ方向の拡散係数 K_{LS} 、 $\bar{u}^2 \approx \langle \bar{u}^2 \rangle$ 、Time Scales 等の一覧表を表-1に上げる。

著者による計算は、現象を流れ方向と川幅方向の二次元として取り扱い、断面形(水深) h と川幅方向 y をそれぞれ最大水深 H 及び川幅 W で無次元化して

$$h = H\beta, \quad y = Wz, \quad \text{径深 } R = H \langle \beta \rangle, \quad \langle \beta^p \rangle = \int_0^1 \beta^p dz$$

のように β を z の変数として表わし、流速公式としてマンニング式を用いた。すなわち、

$$\frac{1}{h} \int_0^h \bar{u} dz = \frac{1}{h} h^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{h} H^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} \quad (9)$$

ここに $\bar{u}$: 時間平均点流速, R : 水深方向

また、川幅方向の乱流拡散係数 C としては、Elder, Fischer の実験より次の値を用いた。

$$C = 0.23 h U_* = 0.23 h^{\frac{2}{3}} \sqrt{gI} = 0.23 H^{\frac{2}{3}} \sqrt{gI} \beta^{\frac{2}{3}}$$

粗度係数 n エネルギー勾配 I は、断面で一定として数値計算を行なった。従って

$$K_{LS} = -\frac{1}{A} \int_0^W \int_0^h \beta' d\beta dz d\beta = -\frac{W^2 U_*^2}{0.23 R U_*} \left\{ -\langle \beta \rangle \int_0^1 \beta (\beta^{\frac{2}{3}} - \frac{\langle \beta^{\frac{2}{3}} \rangle}{\langle \beta \rangle}) \int_0^1 \beta^{\frac{2}{3}} (\beta^{\frac{2}{3}} - \frac{\langle \beta^{\frac{2}{3}} \rangle}{\langle \beta \rangle}) dz d\beta \right\} \quad (10)$$

$$\text{ただし } \beta' = \int_0^h (\bar{u} - \frac{\langle \bar{u} \rangle}{\langle \beta \rangle}) dz = \bar{u} - h \frac{\langle \bar{u} \rangle}{\langle \beta \rangle} = \frac{1}{h} H^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{3}} \beta (\beta^{\frac{2}{3}} - \frac{\langle \beta^{\frac{2}{3}} \rangle}{\langle \beta \rangle}) \quad (12)$$

表-1. 定常流についてのみかけの拡散係数、流速変動、Time Scales 等。

	Taylor	Elder	Fischer	著者	三角形断面	放物形断面
K_{LS}	$10.1 a U_*$	$\frac{0.904}{h^3} h U_*$	$0.30 \frac{\bar{u}^2}{R U_*}$	$\frac{W^2 U_*^2}{0.23 R U_*} \delta$	$0.0319 \frac{B^2 U_*^2}{R U_*}$	$0.0151 \frac{B^2 U_*^2}{R U_*}$
$\bar{u}^2$	$11.2 U_*^2$	$(\frac{U_*}{h})^2$	(実測)	$U_*^2 \mu$	$0.0945 U_*^2$	$0.0487 U_*^2$
T_L	$0.902 \frac{a}{U_*}$	$\frac{0.904}{h} \frac{h}{U_*}$	$0.30 \frac{\bar{u}^2}{R U_*}$	$\frac{W^2}{0.23 R U_*} \frac{\delta}{\mu}$	$0.338 \frac{B^2}{R U_*}$	$0.310 \frac{B^2}{R U_*}$
$\bar{C}$	$0.052 a U_*$	$\frac{h}{\delta} U_*$	$0.23 R U_*$	$0.23 R U_* \frac{\langle \beta^{\frac{2}{3}} \rangle}{\langle \beta \rangle^{\frac{2}{3}}}$	$0.72 R U_*$	$0.311 R U_*$
T_C	$19.2 \frac{a}{U_*}$	$\frac{\delta}{h} \frac{h}{U_*}$	$\frac{\bar{u}^2}{0.23 R U_*}$	$\frac{\bar{u}^2}{0.23 R U_*} \frac{\langle \beta^{\frac{2}{3}} \rangle}{\langle \beta \rangle^{\frac{2}{3}}}$	$2.69 \frac{B^2}{R U_*}$	$3.21 \frac{B^2}{R U_*}$
T_L/T_C	0.0487	$\frac{0.904}{\delta}$	0.0674	$\frac{W^2}{\bar{u}^2} \frac{\langle \beta^{\frac{2}{3}} \rangle}{\langle \beta \rangle^{\frac{2}{3}}} \frac{\delta}{\mu}$	0.126	0.0965
断面形	円管 u_* : マニング速度	無限幅二次元開水路 u_* : カルマン速度	 R : 径深 U_* : マニング速度	 R : 平均水深 U : 平均流速	 $l=B$ $\rho=7$	 $l=B$ $\rho=7(2-2)$
$\delta = -\langle \beta \rangle \int_0^1 \beta (\beta^{\frac{2}{3}} - \frac{\langle \beta^{\frac{2}{3}} \rangle}{\langle \beta \rangle}) \int_0^1 \beta^{\frac{2}{3}} (\beta^{\frac{2}{3}} - \frac{\langle \beta^{\frac{2}{3}} \rangle}{\langle \beta \rangle}) dz d\beta$, $\mu = \langle \beta \rangle \int_0^1 \beta (\beta^{\frac{2}{3}} - \frac{\langle \beta^{\frac{2}{3}} \rangle}{\langle \beta \rangle})^2 dz$, $\langle \beta \rangle = \int_0^1 \beta dz$						

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{W} \int_0^W \theta dy \quad (13) \quad \langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{W} \int_0^W \theta^2 dy = \frac{A}{W} = R \quad (14)$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{A} \int_0^W \theta \left(\frac{\theta}{A} - \frac{\langle \theta \rangle}{A} \right)^2 dy = 11^2 \langle \theta \rangle^2 \int_0^1 \beta \left(\beta^2 - \frac{\langle \theta \rangle}{\langle \theta \rangle} \right)^2 dz \quad (15)$$

周期的に流向と流速を变化する流れ(例えば「感潮河川」河口部の流れ)におけるみかけの拡散係数 K_L は、Taylor や Fischer の方法にならって計算を行ない、次のように得られている。

$$\frac{K_L}{K_{LS}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} \frac{1}{1 + 4\pi^2(2j-1)^2(T_L/T)^2} = 1 - \frac{4T_L}{T} \tanh \frac{T}{4T_L} \quad (16)$$

ただし

$$K_{LS} = -\frac{1}{A} \int_0^W \theta \int_0^y \frac{\partial \theta}{\partial y} dy dz$$

θ_0, θ_0 : それぞれ1周期の最大値 $\frac{K_L}{K_{LS}}$

T_L : Lagrangian Time Scale

T : 周期的流れの周期

K_L/K_{LS} の T_L/T に対する変化を 図-1 に示す。Fischer⁵⁾

は K_L/K_{LS} を T/T_L の関数として求めている。

§3. 実験装置と実験方法

これまで(S43年10月土木学会年次学術講演会Ⅱ-94, S44年2月土木学会西部支部研究発表会Ⅲ-10)の実験では、円管において周期的流れを起し、拡散係数を測定していたが、実際の河川等を考えたとき、川幅方向の流速分布とそ

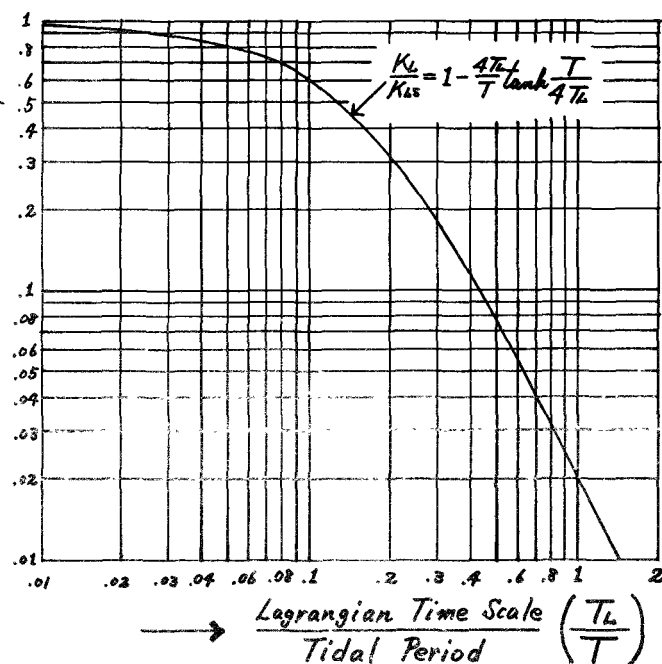


図-1 周期的流れにおけるみかけの拡散係数

れによる乱流拡散が、拡散現象に大きく影響することが想像される。それで今回は、管路幅と水深の比の大きな細長い三角形断面の管路にかりて実験を行なった。その実験装置略図と 図-2 に示す。管路は断面が細長い三角形断面のため、管壁に砂粒が溜りこみやすいため、トレーナートレは塩水を用い、それを注射器によって管路に一点注入した。ピストンを一番奥へ入れた状態から周期的流れを開始して、注入点から1m近く離れた点に設置した電極を用いて、4電極法により電気伝導度

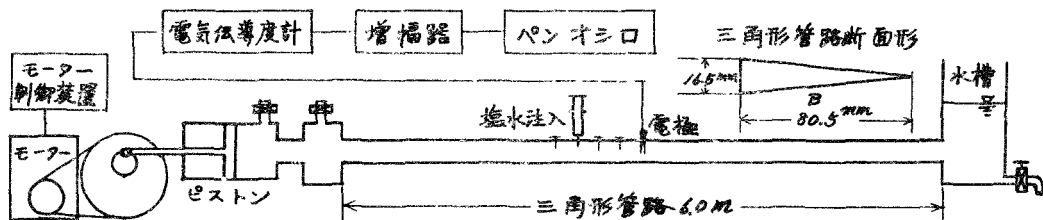


図-2 実験装置略図

を測定し、その時間変化をペン書きオシログラフに記録させた。その記録は1点注入で拡散係数 K_L が時間的にも空間的にも一定としたときの1次元の拡散方程式の解から、次のような曲線で表わせると考えられる。

$$C(x, t) = \frac{M}{2PA\sqrt{\pi K_L t}} \exp\left[-\frac{\left\{x_0 + \frac{1}{2}S(1 - \cos \frac{2\pi}{T}t)\right\}^2}{4K_L t}\right]$$

ただし ρ : 流体の密度 A : 管路断面積

M : 初期におけるトレーサー注入量

$t=0$ においてトレーサー注入

x_0 : トレーサー注入点から電極までの距離

S : 周期的流れのストローク(半周期の間に管内の流体が移動する距離)

従って、濃度時間曲線の2つの包絡線は、次に示すような $x=x_0$ 点と $x=x_0+S$ 点における濃度変化と考えられ、この曲線から最も適合した拡散係数を求めた。

$$C(x_0, t) = \frac{M}{2PA\sqrt{\pi K_L t}} \exp\left\{-\frac{x_0^2}{4K_L t}\right\}$$

$$C(x_0+S, t) = \frac{M}{2PA\sqrt{\pi K_L t}} \exp\left\{-\frac{(x_0+S)^2}{4K_L t}\right\}$$

§4. 実験結果と考察 実験によつて得られたみかけの拡散係数 K_L の変化を 図-3 に示す。

このグラフは、断面の管路では $1/4$ がほぼ一定と考えて、 $K_{LS} \sim RL \sim RL$ となり、 K_L/RL を縦軸にとり、 T/τ or $T/\tau \sim \frac{I(RL)}{B^2} \sim \frac{4T}{R} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \sim \frac{S}{R} \left(\frac{R}{B}\right)^2$ から S/R を横軸にとっている。図-1 と 図-3

を比べると大体のグラフの傾向(右下加りの曲線の様子)が表われており、理論的に述べた周期的流れの影響が出ているようである。なお実験の Re 数 $= \frac{RL}{\nu}$ (L は1周期の平均流速)の範囲は100 ~ 5000 であった。また管路 R は 4375 cm, $B/R = 20$ である。

§5. 寸す24 周期的流れにおけるみかけの拡散係数 K_L と定常流に相当するもの K_{LS} を断面の形状及びマサウ速度或いは平均流速から推定する方法を述べ、 K_L/K_{LS} の $T/\tau \sim S/R$ に対する変化の傾向を実験により確かめた。 K_L/K_{LS} の変化は内管においては S/R の変化として表わされ、この報告におけるような三角形管路では、 $\frac{S}{R} \left(\frac{R}{B}\right)^2$ について変化するようである。従つて仮に S/R で表現すれば、周期的流れであるための影響は内管に比べて遙かに長周期のものにまで及びものと考えられる。

参考文献 1) Taylor, G.I.: Proc., Royal Society of London, Vol. 223, 1954, pp.446-448.

2) Elder, J.W.: Journal of Fluid Mechanics, Vol. 5, 1959, pp.544-560.

3) Fischer, H.B.: Proc. of A.S.C.E., Vol. 93, HY6, 1967, pp.187-216.

4) 栗谷, 古本, 島田: 「周期的流れにおける乱流拡散」 九州大学工学集報投稿中

5) Fischer, H.B.: Proc. 13th Congress of I.A.H.R., (C), 1969, pp.173-180.

$\frac{K_L}{RL}$

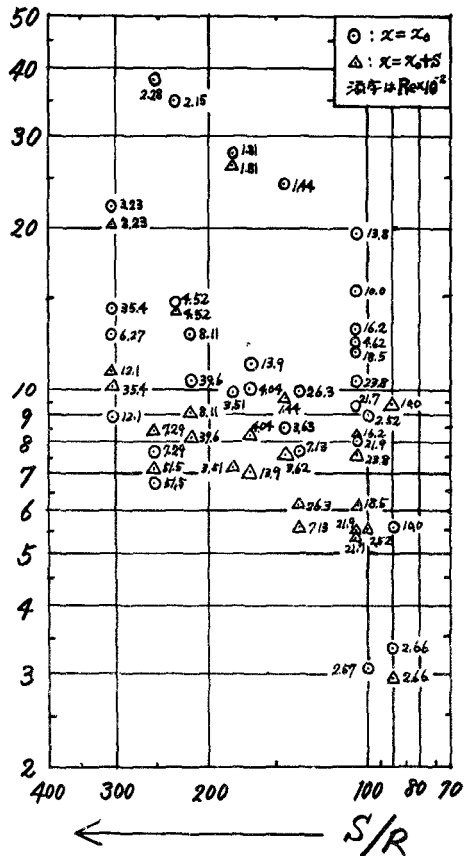


図-3 拡散係数 K_L の実測値