

I. まえがき

最近 ダム地点に於ける地下発電所とか 鉄道 道路のトンネル等 岩質な地中に土木構造物を建設する例が多く見うけられる。しかし 現在 これら地中構造物の耐震設計法は確立されておらず多くの問題が解決されずに残されたまゝになっている。そこで、本研究は まず地震時に於いて岩盤内空洞周辺の変位、応力が如何にかく乱されるかを調べてみた。

従来、覆工に作用する地震力は、もっぱら土圧論的手法で評価されてきたが、岩質な地中にあるような場合には、むしろ弾性波動論的に検討する方が妥当と考えられる。本研究はその第一段階として岩質な地中に素掘り矩形トンネルが存在する場合の地震時挙動を弾性論的に解析したものである。本論では地震剪断力を静的に考慮しており 数値解析には階差法を用いた。これらの結果より地震時に於ける素掘り矩形トンネル周辺の変位、応力を定量的に知ることができる。

II. 仮定

1. 岩盤は均質な等方性弾性体とする。
2. ひずみ分布は2次元とし平面ひずみ状態とする。
3. トンネル断面は正方形とする。
4. 地震波は剪断平面波であり無限に連続な正弦波形とする。従って、トンネルによりかく乱される前の地震

$$(1) \quad \begin{cases} u = a \sin \omega (t - \frac{z}{C_s}) \\ w = 0 \end{cases}$$

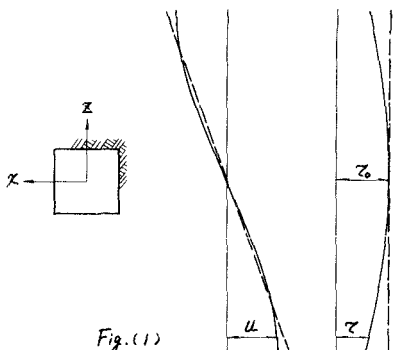


Fig. (1)

で表わされる。ここで、 u , w は x , z 座標軸方向の変位、 a は変位振幅、 ω は波動の円振動数、 C_s は波動の伝播速度であり ラーメ定数を μ , λ とすると次のように表わされる。

$$C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2)$$

III. 弾性体の運動方程式

a). 運動方程式

連続弾性体の運動方程式は次のように表わされる。

$$(3) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z \end{cases}$$

ここで、 ρ は弾性体の密度、 X , Y , Z は x , y , z 座標軸方向の物体力を表わし、

$\epsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. また、この $E_g(3)$ を $x-z$ 平面内に限ると

Eq.(3)は次のように表わされる。

$$(4) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} + X \\ \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + Z \end{cases}$$

b) 不均等格子の階差表示と β -method.

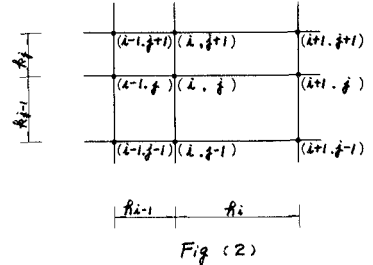
Eq.(4)の偏微分方程式に、不均等間隔の格子に適用できる階差表示と N.M. Newmark の β -method とを用いることにより、各時刻の各格子点の運動性状を知ることができる。まず、Fig.(2)を参照すると、各偏微分は次のように表示される。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{(i,j)} = \frac{1}{2h_i h_{i-1}} \{ h_{i-1} U(i+1, j) + (h_i - h_{i-1}) U(i, j) - h_i U(i-1, j) \}$$

さらに2次微分は

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{(i,j)} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2(h_i h_{i-1})^2} \{ h_{i-1} U(i+1, j) - (h_i + h_{i-1}) U(i, j) + h_i U(i-1, j) \}$$

同様にして $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{(i,j)}$, $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_{(i,j)}$, $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_{(i,j)}$ が得られる。共役微分は次のようになる。



$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_{(i,j)} = & \frac{1}{4h_i h_{i-1} h_j h_{j-1}} \{ h_{i-1} h_{j-1} U(i+1, j+1) + h_{i-1} (h_i - h_{i-1}) U(i+1, j) - h_{i-1} h_i U(i+1, j-1) + h_{i-1} (h_i - h_{i-1}) U(i, j+1) \\ & + (h_i - h_{i-1} + h_i h_i - h_{i-1} h_i - h_i h_{i-1}) U(i, j) + h_i (h_{i-1} - h_i) U(i, j-1) - h_i h_{i-1} U(i-1, j+1) + h_i (h_{i-1} - h_i) U(i-1, j) + h_i h_i U(i-1, j-1) \} \end{aligned}$$

同様にして、 $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right)_{(i,j)}$ も得られる。また β -method によると、速度、加速度は変位の函数として次のように表わされる。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_t = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t-\Delta t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_t \right\} \Delta t$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_t = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \left\{ U_t - \left\{ U_{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t-\Delta t} (\Delta t) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{t-\Delta t} (\Delta t)^2 \right\} \right\}$$

同様に、 $\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_t$, $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right)_t$ も求める。ここで、 Δt は時間間隔であり t は現時刻、 $t - \Delta t$ は前時刻の意である。従って Eq.(4)を不均等格子による階差表示で表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho}{\beta(\Delta t)^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{2(h_i h_{i-1})^2} + \mu \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{2(h_i h_{i-1})^2} \right] U(i, j) - (\lambda + 2\mu) \frac{h_i + h_{i-1}}{2(h_i h_{i-1})^2} \{ h_{i-1} U(i+1, j) + h_i U(i-1, j) \} \\ & - \mu \frac{h_i + h_{i-1}}{2(h_i h_{i-1})^2} \{ h_{i-1} U(i, j+1) + h_i U(i, j-1) \} - \frac{(\lambda + \mu)}{4h_i h_{i-1} h_j h_{j-1}} \{ h_{i-1} h_{j-1} W(i+1, j+1) + h_{i-1} (h_i - h_{i-1}) W(i+1, j) - h_i h_{i-1} W(i+1, j-1) \\ & + h_{i-1} (h_i - h_{i-1}) W(i+1, j) + (h_i - h_{i-1}) (h_i - h_{i-1}) W(i, j) - h_i (h_i - h_{i-1}) W(i-1, j) - h_i h_{i-1} W(i-1, j-1) - h_i (h_i - h_{i-1}) W(i-1, j) \\ & + h_i h_i W(i-1, j-1) \} = \frac{\rho}{\beta(\Delta t)^2} \left\{ U(i, j)_{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{(i,j)}_{t-\Delta t} \cdot (\Delta t) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{(i,j)}_{t-\Delta t} (\Delta t)^2 \right\} + X \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho}{\beta(\Delta t)^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{2(h_i h_{i-1})^2} + \mu \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{2(h_i h_{i-1})^2} \right] W(i, j) - (\lambda + 2\mu) \frac{h_i + h_{i-1}}{2(h_i h_{i-1})^2} \{ h_{i-1} W(i, j+1) + h_i W(i, j-1) \} \\ & - \mu \frac{h_i + h_{i-1}}{2(h_i h_{i-1})^2} \{ h_{i-1} W(i+1, j) + h_i W(i+1, j) \} - \frac{(\lambda + \mu)}{4h_i h_{i-1} h_j h_{j-1}} \{ h_{i-1} h_{j-1} U(i+1, j+1) + h_{i-1} (h_i - h_{i-1}) U(i+1, j) - h_i h_{i-1} U(i+1, j-1) \\ & + h_i (h_i - h_{i-1}) U(i, j+1) + (h_i - h_{i-1}) (h_i - h_{i-1}) U(i, j) - h_i (h_i - h_{i-1}) U(i, j-1) - h_i h_{i-1} U(i-1, j+1) - h_i (h_i - h_{i-1}) U(i-1, j) \\ & + h_i h_i U(i-1, j-1) \} = \frac{\rho}{\beta(\Delta t)^2} \left\{ W(i, j)_{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{(i,j)}_{t-\Delta t} (\Delta t) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right)_{(i,j)}_{t-\Delta t} (\Delta t)^2 \right\} + Z \quad (6) \end{aligned}$$

c) 応力

応力の不均等間隔格子による階差表示は次のようになる。

$$(7) \begin{cases} \sigma_x = \frac{(\lambda+2\mu)}{2k_i k_{i-1}} \{ k_{i-1} u(i+j) + (k_i - k_{i-1}) u(ij) - k_i u(i+j) \} + \frac{\lambda}{2k_i k_{i-1}} \{ k_{i-1} w(ijm) + (k_i - k_{i-1}) w(ij) - k_i w(i+j) \} \\ \sigma_z = \frac{(\lambda+2\mu)}{2k_i k_{i-1}} \{ k_{i-1} w(ijm) + (k_i - k_{i-1}) w(ij) - k_i w(i+j) \} + \frac{\lambda}{2k_i k_{i-1}} \{ k_{i-1} u(i+j) + (k_i - k_{i-1}) u(ij) - k_i u(i+j) \} \\ \tau_{xz} = \frac{\mu}{2k_i k_{i-1}} \{ k_{i-1} w(ijm) + (k_i - k_{i-1}) w(ij) - k_i w(i+j) \} + \frac{\mu}{2k_i k_{i-1}} \{ k_{i-1} u(i+j) + (k_i - k_{i-1}) u(ij) - k_i u(i+j) \} \end{cases}$$

以上、波動方程式の形で表現される連続弾性体の運動方程式及び応力と不均等格子による階差表示で表わしたが、本論では慣性力の項を無視して数値計算を行った。その根拠として、岩盤内では地震波の波長はトンネルの大きさに比較して非常に長いと考えられる。その上、変位 u は正弦波形なのである時刻における変位 u を Fig.(1) に示すように直線変位分布と仮定できるからである。即ち、この地震剪断力では次の関係があるので様に岩盤に作用していることになる。

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (8)$$

さうに $Eg(1)$ に $Eg(1)$ を代入すると次の関係が得られる。

$$\tau = -\mu \frac{a\omega}{C_s} \cos \omega \left(t - \frac{z}{C_s} \right) \quad (9)$$

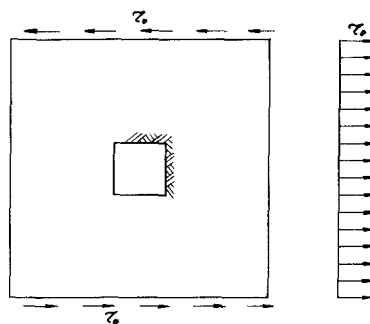


Fig. (3)

ここで問題になるのはこの地震剪断力が最大になるときである。そこで本論では Fig.(3) に示すように最大地震剪断力 $\tau_0 = \mu \frac{a\omega}{C_s}$ が岩盤に一樣に、静的に作用している場合を考慮した。この仮定は安全側にあるので妥当であると考えられる。また、トンネルから十分離れた場所ではトンネルによる乱れの影響はほとんど現れなないと考えられるので、本論ではトンネルの深さの2倍トンネルから離れている場所では乱れの影響はないものと仮定した。また、Fig.(3) の条件のもとでは変位、応力に対称性があるので、Fig.(4) のごとく4分の1の部分の変位、応力を求めればすべての場所の地震時変位、応力を知ることができる。次に $Eg(5)$, $Eg(6)$ で慣性力の項を無視した連立差分方程式は一面に2個の境界条件式が成立すれば解けることになるので以下その境界条件を列記する。

④ 境界条件

- AB面の変位 u は0である。また応力 σ もAB面の上下で逆対称になるので0である。
- BC面では前述の仮定よりトンネルによる乱れの影響はないので変位 w は0であり変位 u は直線分布と仮定したので $u = \frac{\tau_0}{\mu} z$ の式で与えられる。
- CD面もBC面と同じく乱れの影響はないので変位 w は0であり変位 u は z に H を代入して、 $u = \frac{\tau_0}{\mu} H$ となる。
- DE面ではこの面の左右で変位 w 、及び応力 σ は逆対称になるので0である。
- EF面は大気に接している部分なのでその表面の垂直応力 σ_z 、及び剪断力 τ_{xz} は共に0でなければならない。

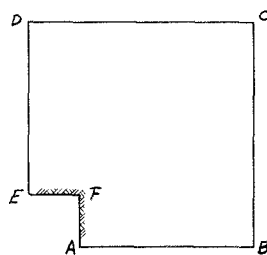


Fig. (4)

・F A面はEF面と周しく大気に接しているのでその垂直応力 σ_z , 剪断力 τ_{xz} は0である。

以上の境界条件のもとで階差表示による弾性基礎方程式を解くと所要の変位 u , w が求まる。さらに、この変位 u , w を応力の階差表示式 $Eg(7)$ に代入することにより応力 σ_x , σ_z , τ_{xz} が求まる。なお本論の数値解析例ではこのA B C D E Fで囲まれた部分を均等間隔の格子に分割したが その結果格子点数が274個となりマトリックス表示による解析は大型電子計算機の限界記憶容量の関係から不可能だったので *iteration* で求めた。

IV. 数値解析例

トンネル一辺の長さを4.20mとし、地震の強さとしては $a_w = 10 \text{ cm/sec}$ を採用した。詳細は発表当日にプリントして配布します。

V. 考察

本研究は地震時に於いて岩盤内に於て共振リットンネル周辺の変位、応力がどのようにかく乱されているかを弾性方程式に階差法を用いて繰り返し計算を実行することにより数値解析したものである。本論では慣性力の影響を全く無視して地震力を一定とする大胆な仮定のもとに数値解析を行っているが この仮定は岩盤内での波動速度 C_b は非常に速いものであるという事 即ち岩盤中では波長が長いと考えられる事にもついている。さらに Fig (1)を参照するとよくわかるが変位 u が0の時、地震剪断力では最大となる。その時、慣性力も0となり、従ってこの時点で慣性力の影響はないのでこの仮定は全体に対してそれほど影響しないと思われる。

本論文では覆工のないトンネル周辺の変位、応力を求めたが将来はこの変位、応力が岩盤と弾性係数の異なる覆工とどのような相互作用を及ぼし合うか、さらに波動論的考察を加えながら地中構造物の耐震設計法を追求していく予定である。

※ 参考文献

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1 自然科学者のための数学概論 応用編 | 寺沢寛一編 |
| 2 数値積分法(下巻) | 日高孝次著 |
| 3 土木技術者のための岩盤力学 | 土木学会編 |
| 4 地震力を考えた構造物設計法 | 岡本舜三著 |
| 5. Theory of Elasticity | S. Timoshenko 著 |
| 6 岩石力学とその応用 | 日本材料学会編 |
| 7. 防災ハンドブック | |
| 8 地震工学(建築構造学大系) | 金井 清他著 |
| 9 地中構造物に働く地震力に関する研究 | 土木学会論文集(昭38) 岡本加藤伯野 |
| 10. 階差法を用いた波動方程式の一般法 | 建築学会学術講演要録集(昭43) 神谷 堤 田口 |